

Rétroconception en modélisation à base topologique

Franck Ledoux

LaMI, UMR 8042, 523 Place des Terrasses, 91000 Évry Cedex
fledoux@lami.univ-evry.fr

Résumé : *La description intuitive des opérations géométriques peut se faire de plusieurs façons : soit informellement, soit mathématiquement, soit par un algorithme. La première véhicule l'intuition sous-jacente aux opérations mais ne fournit ni rigueur, ni précision. Ceci est apporté par un algorithme ou une définition mathématique. L'approche algorithmique est appréciée par les développeurs, mais elle impose une implantation type. De plus elle rend difficile la comparaison des approches qui diffèrent souvent sur des configurations particulières. L'approche mathématique qui consiste à décrire de manière systématique le résultat des opérations, est plus abstraite. Elle n'a donc pas le biais précédent. Cependant, ces définitions ne reflètent généralement pas l'intuition des opérations, ce qui les rend souvent obscures et difficiles à manipuler pour des opérations complexes. Sur ce constat, nous proposons de définir différemment les opérations géométriques. Les définitions restent mathématiques, mais on tire parti des propriétés du modèle pour n'explicitier que le minimum de modifications à effectuer. De cette façon, nous obtenons un niveau de définition plus abstrait véhiculant toute l'intuition des opérations et du modèle topologique. Ce résultat a été obtenu en utilisant une méthode de rétro-définition basée sur l'utilisation des propriétés du modèle. Nous avons mené une formalisation complète du modèle des n - G -cartes et de l'opération de chanfreinage.*

Mots-clés : Topologie, n - G -cartes, abstraction, spécifications formelles, chanfreinage.

1 Introduction

En modélisation à base topologique, les objets sont représentés en distinguant leur topologie, c'est-à-dire leur décomposition en volumes, faces, arêtes et sommets, et leur géométrie, c'est-à-dire leur position et leur forme dans l'espace. Dans ce cadre, de nombreux modèles mathématiques permettent de représenter une classe particulière d'objets. Par exemple, les *cartes généralisées de dimension n* [Lie91], ou *n - G -cartes*, modélisent des quasi-variétés ouvertes ou fermées, orientables ou non, et de dimension quelconque. Pour ce faire, les n - G -cartes disposent de propriétés que toute opération de transformation d'objets doit préserver. Usuellement, la définition d'opérations géométriques peut se faire de trois façons différentes :

1. *informellement* - Le plus souvent les descriptions informelles sont très intuitives. Elles s'appuient sur des exemples et décrivent le résultat des opérations sans préciser la façon de calculer ce résultat. Malheureusement, elles sont souvent incomplètes et imprécises. Par exemple, on dira d'une opération de collage entre deux objets volumiques, qu'elle identifie des faces de chaque objet.
2. *mathématiquement* - Par nature, les définitions mathématiques sont précises et en pratique elles sont toujours complètes. Malheureusement, les définitions mathématiques des opérations topologiques sont très peu intuitives. Elles décrivent le résultat de manière systématique, sans même différencier les parties des objets modifiées ou non par les opérations. Elles restent cependant relativement abstraites, puisqu'elles décrivent le résultat et non le moyen de le calculer. Par exemple, pour le collage de deux volumes, on posera comme précondition que les faces à identifier soient isomorphes, et on décrira complètement l'objet résultant de ce collage.
3. *algorithmiquement* - On explique comment effectuer effectivement l'opération. Cette approche est appréciée par les développeurs, mais elle impose une implantation type. En effet, pour écrire réellement l'algorithme, il est nécessaire de s'appuyer sur la structure de données réellement utilisée. Si cette structure change, la définition n'est plus valable. Par exemple, si un objet est représenté comme une liste d'arêtes liées entre elles par des relations d'adjacence, un algorithme pour l'opération de collage pourra être basé sur le parcours de la liste des arêtes composant chacun des objets à coller et sur l'identification des arêtes à coller.

Définir informellement une opération offre l'avantage de présenter intuitivement ce que doit faire l'opération, mais cette approche n'apporte ni rigueur, ni précision. L'utilisation d'un algorithme pallie ces problèmes, mais dépend trop de l'implantation. Elle rend donc impossible la comparaison des approches qui diffèrent souvent sur des configurations particulières. Une définition mathématique est rigoureuse, précise et ne tient pas compte de l'implantation. Elle semble donc la plus adaptée pour définir une opération géométrique. Cependant, elle a le désavantage de ne véhiculer aucune intuition liée au modèle manipulé.

Partant de ce constat, nous proposons de définir différemment les opérations géométriques. Les définitions restent mathématiques, mais on tire parti des propriétés du modèle pour n’expliciter que le minimum de modifications à effectuer. Certaines modifications implicites découlent alors des propriétés du modèle. On obtient de cette façon des définitions mathématiques plus abstraites que celles habituellement proposées, qui sont exhaustives, souvent obscures et difficiles à manipuler. Cette approche permet de formaliser fidèlement les descriptions intuitives des opérations géométriques. Elles sont donc plus faciles à écrire et ont moins de risque d’être erronées.

L’obtention de ces nouvelles définitions plus abstraites et plus intuitives, découle d’une étude complète de formalisation menée à l’aide du langage de spécification algébrique CASL [CAS00, Mos99, BM00]. Ce langage dispose d’un grand pouvoir d’expression qui permet de formaliser l’ensemble des concepts topologiques et d’utiliser un syntaxe très proche des notations mathématiques habituelles. Néanmoins, afin de nous concentrer sur la méthode de rétroconception proposée, nous présentons nos définitions abstraites sous la forme mathématique usuelle et non leurs spécifications qui peuvent être consultées dans [LAGB01, LA01].

Dans cet article, nous nous intéressons au modèle des n -G-cartes [Lie89, Lie91], à ses opérations de base et à des opérations plus complexes telles que le chanfreinage [Elt94]. Nous commençons par présenter le modèle des n -G-cartes ainsi que l’opération de base de couture. Cette opération nous sert à introduire notre méthode de rétroconception que nous appliquons ensuite sur l’opération de chanfreinage.

2 Cartes généralisées et rétroconception

Nous présentons dans cette section le modèle topologique des n -G-cartes, ainsi que l’opération de couture qui permet de coller deux objets de même dimension entre eux.

2.1 Cartes généralisées de dimension n

Une carte généralisée de dimension n ou n -G-carte est un modèle définissant la topologie d’une subdivision d’espace de dimension n . Ce modèle est un modèle ordonné qui est défini à partir d’un type unique d’éléments abstraits, les *brins*, sur lesquels sont définis des relations d’adjacence. Il permet de représenter des quasi-variétés orientables ou non de dimension n en fournissant une définition homogène à toutes les dimensions. Avant d’introduire la définition mathématique des n -G-cartes, présentons les intuitivement en décomposant successivement les différentes cellules d’un objet (voir figure 1). Les brins sont représentés visuellement par des segments ou demi-arêtes. Les liens entre brins sont modélisés mathématiquement par des applications ayant la propriété d’être des involutions¹.

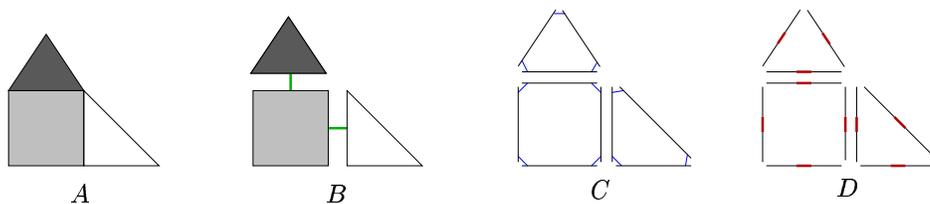


FIG. 1 – Décomposition d’un objet 2D en un ensemble de brins.

Considérons l’objet géométrique 2D de la figure 1–A. À la figure 1–B, le même objet est décomposé de façon à mettre en évidence les relations d’adjacence entre les faces le composant. À la figure 1–C, on poursuit la décomposition de l’objet initial en décomposant chaque face en objets de dimension inférieure, c’est-à-dire en des arêtes liées par leurs relations d’adjacence. Enfin, à la figure 1–D, chaque arête est découpée en deux demi-arêtes qui représentent des brins. Pour retrouver totalement l’objet initial à partir des brins, il reste à reporter les différentes relations d’adjacence sur ces éléments afin de retrouver les arêtes, les faces puis l’objet initial tout entier (voir figure 2–A). On dénote les arêtes en indiquant une relation entre deux brins. Cette relation est une involution notée α_0 , car elle relie des brins appartenant à des sommets différents, c’est-à-dire des entités de dimension 0.

¹Une application $f : D \rightarrow D$ est une involution si et seulement si pour tout élément x appartenant à D , on a $xf^2 = x$, où f^2 est la composition de f par f .

Les faces sont reconstruites en introduisant l'involution α_1 qui relie deux brins appartenant à des arêtes différentes (dimension 1). Enfin, l'objet initial est complètement déterminé en reliant des brins de deux faces différentes (dimension 2) par α_2 .

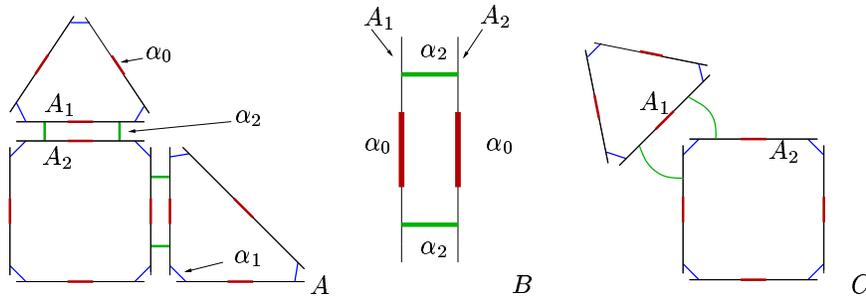


FIG. 2 – Liaisons et invariants dans une 2-G-carte

En résumé, chacune des relations d'adjacence est modélisée par une involution α_i dont l'indice i correspond à la dimension de la relation d'adjacence. Le fait d'utiliser des involutions assure que si un brin b_1 a pour image par α_i un brin b_2 , alors l'image de b_2 par α_i est b_1 , ce qui traduit un lien "physique" réciproque entre deux entités. Cependant, ceci n'est pas suffisant pour garantir la cohésion de la représentation de l'objet. Si nous reprenons l'exemple de la figure 1 et que nous reportons l'ensemble des relations d'adjacence dessus, nous obtenons la représentation de la figure 2–A. Pour obtenir ce résultat, nous avons relié les faces adjacentes le long de leurs arêtes. Comme une arête est formée de deux brins, une liaison entre deux faces est constituée de deux liaisons α_2 . Ces liaisons doivent être cohérentes. Ce qui exclut l'objet de la figure 2–C. La contrainte utilisée ici est que $\alpha_0\alpha_2$ soit une involution. Ainsi, si les arêtes A_1 et A_2 sont définies relativement à une face, on relie leurs brins par α_2 pour obtenir l'arête complète (voir figure 2–B). Ce type de contraintes se généralise simplement aux dimensions supérieures [Lie91].

DÉFINITION 1 (CARTE GÉNÉRALISÉE) Une carte généralisée de dimension n , $n \geq -1$, ou **n-G-carte**, est une algèbre $G=(D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, où :

- D est un ensemble de **brins**, (C₁)
- $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des **involutions** sur D telles que : (C₂)
- $\forall i \in \{0, \dots, n-2\}, \forall j \in \{i+2, \dots, n\}, \alpha_i\alpha_j$ est une involution. (C₃)

Si les différentes cellules² ont bien été mises en évidence lors de nos deux exemples de construction, la définition des n -G-cartes ne s'appuie pas sur une notion explicite de cellules. Pour retrouver les cellules composant une n -G-carte, il suffit de regrouper les brins en fonction des dimensions des liaisons. Cette notion de familles de brins se traduit par la notion d'orbite .

DÉFINITION 2 (ORBITE) Soit une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, un brin $d \in D$ et P un ensemble de m permutations³ $\{p_1, \dots, p_m\}$ sur D . On appelle **orbite** de d par rapport à P l'ensemble

$$\{d' | \exists p'_1 \in P, \dots, \exists p'_k \in P, \text{ avec } d' = dp'_1 \dots p'_k\} \text{ (on peut avoir } p'_i = p'_j \text{ pour } i \neq j)$$

et on note cette orbite $\langle p_1, \dots, p_m \rangle (d)$.

L'orbite $\langle p_1, \dots, p_k \rangle (d)$ peut être vue comme l'ensemble des brins atteignables à partir de d par la composition des fonctions p_1, \dots, p_k . Les cellules sont des orbites particulières.

DÉFINITION 3 (CELLULE) Soient une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, un brin $d \in D$, et un entier i inférieur à n . La **i-cellule** contenant d est l'orbite $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle (d)$.

Une i -cellule contenant un brin d est donc constituée de l'ensemble des brins atteignables à partir de d par toute composition d'involutions différentes de α_i . L'involution α_i relie entre elles deux cellules de dimension i . Elle permet donc de "passer" d'une i -cellule à sa voisine. La figure 3 présente les différentes cellules d'une 3-G-carte :

²Sommets, arêtes, faces, volumes, etc.

³Une fonction p est une permutation sur l'ensemble D si pour tout brin $d \in D$, il existe un entier $k > 0$ tel que $dp^k = d$.

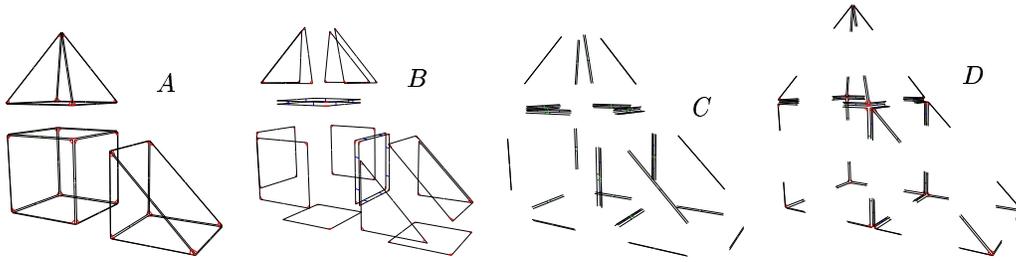


FIG. 3 – Cartes des cellules.

en A , les volumes ou 3-cellules ; en B , les faces ou 2-cellules ; en C , les arêtes ou 1-cellules ; en D , les sommets ou 0-cellules.

2.2 Couture et rétroconception

L'opération de couture est une opération de base qui permet de coller deux objets de même dimension⁴. Nous introduisons sa description informelle puis nous présentons sa définition mathématique classique pour finalement détailler notre approche.

2.2.1 Description informelle

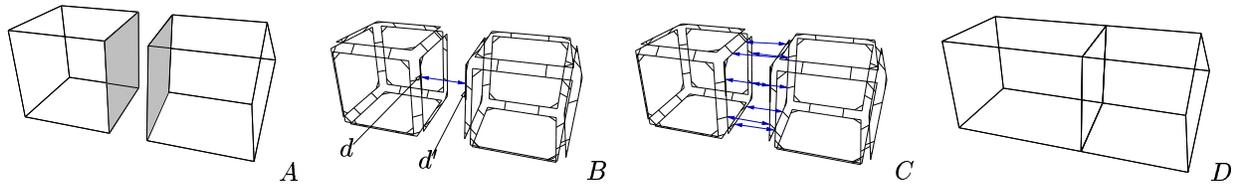


FIG. 4 – Couture de deux cubes le long d'une face.

Considérons deux cubes que l'on veut coller le long d'une face (voir figure 4). Naturellement, on souhaite désigner les deux faces à coller ensemble. En l'occurrence, les faces grisées de la figure 4– A . Comme nous utilisons le modèle des n - G -cartes, cela revient simplement à désigner deux brins d et d' qui appartiennent à ces deux faces et seront liés par la couture (voir figure 4– B). Puisque nous voulons coller deux volumes, les brins d et d' seront cousus par α_3 , ainsi que tous les autres brins des deux faces (voir figure 4– C). Nous obtenons ainsi l'objet géométrique de la figure 4– D . Notons qu'une précondition de cette opération est que les brins désignés ne soient pas déjà cousus par α_3 . C'est le cas ici, et on dira que d et d' sont 3-libres.

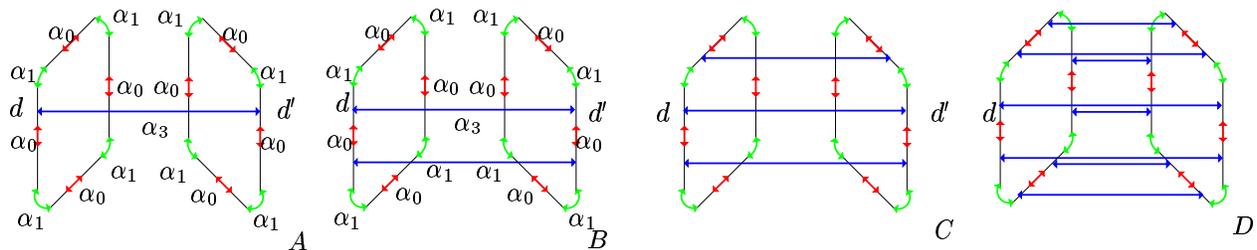


FIG. 5 – Comment coudre deux faces ensemble.

Du fait des propriétés des n - G -cartes, la désignation de deux brins et d'une dimension suffit à déterminer la couture. En effet, attardons-nous sur les brins des deux faces à coller (voir figure 5). À la figure 5– A , le lien par α_3 entre

⁴D'un point de vue géométrique, l'opération de couture correspond à l'opération classique d'identification d'arêtes en B-Rep.

les deux brins d et d' est établi. Le fait que d et d' soient liés par α_3 impose que les brins $d\alpha_0$ et $d'\alpha_0$ soient aussi liés par α_3 pour assurer la propriété que $\alpha_0\alpha_3$ est une involution (voir figure 5–B). De même, les deux brins $d\alpha_1$ et $d'\alpha_1$ doivent être liés par α_3 pour assurer que $\alpha_1\alpha_3$ est une involution (voir figure 5–C). Par propagation, tous les brins des deux faces doivent aussi être liés par α_3 pour obtenir une 3-G-carte cohérente (voir figure 5–D). Notons que si les deux faces n’avaient pas été “identiques”, il n’aurait pas été possible de préserver les propriétés du modèle.

La description intuitive de l’opération de couture se résume donc simplement à dire que l’on lie deux brins ensemble. Les autres liens sont imposés par des propriétés du modèle.

2.2.2 Définition mathématique de la couture

Usuellement, une opération est définie de manière constructive soit par une définition mathématique, soit par un algorithme. Dans le modèle des n -G-cartes, les définitions mathématiques existantes énumèrent l’ensemble des brins et des liens du nouvel objet. Ces définitions ne traduisent donc pas directement l’intuition. Par exemple, une définition mathématique de la couture [Elt94] est :

DÉFINITION 4 (COUTURE) Soient une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, deux brins $d, d' \in D$, $i \leq n$ un entier naturel et φ un isomorphisme de $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d)$ dans $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d')$ tel que $\varphi(d) = d'$. Nous définissons la n -G-carte $G' = (D', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ par :

1. $D' = D$
2. $\forall j, 0 \leq j \leq n, j \neq i, \alpha'_j = \alpha_j$
3. $\alpha'_i(e) = \begin{cases} \varphi(e) & \text{si } e \in \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d) \\ \varphi^{-1}(e) & \text{si } e \in \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d') \\ \alpha_i(e) & \text{sinon.} \end{cases}$

(3.1)
(3.2)
(3.3)

G' est la n -G-carte résultant de la i -couture de d et d' dans G .

Dans cette définition, la notion d’isomorphisme utilisée est définie comme suit.

DÉFINITION 5 (ISOMORPHISME DANS UNE n -G-CARTE) Soient une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ et un sous-ensemble $I = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_i\}$ de $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Étant donnés deux brins d et d' de D , une fonction $\varphi : D \rightarrow D$ réalise un isomorphisme de $\langle I \rangle (d)$ sur $\langle I \rangle (d')$ si et seulement si

1. φ réalise une bijection de $\langle I \rangle (d)$ sur $\langle I \rangle (d')$;
2. pour toute involution $\alpha'_j \in I$, pour tout brin d_1 de $\langle I \rangle (d)$, on a

$$d_1 \alpha'_j \varphi = d_1 \varphi \alpha'_j.$$

La définition 4 mérite quelques explications :

- l’isomorphisme φ de $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d)$ dans $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d')$ permet de représenter les nouveaux liens ajoutés par la couture. Le choix de ces deux orbites est compréhensible si l’on se souvient des contraintes régissant le modèle des n -G-cartes. En particulier, $\alpha_i\alpha_j$ est une involution pour tout $0 \leq i + 1 < j \leq n$. Puisque d et d' sont cousus par α_i , il est nécessaire de coudre aussi les brins $d\alpha_j$ et $d'\alpha_j$ par α_i pour tout $j \in \{0, 1, \dots, i - 2, i + 2, \dots, n\}$ afin d’assurer cette contrainte. Par propagation, tous les brins des deux orbites se trouvent donc liés par α_i .
- les points (2) et (3.3) de la figure 4 indiquent quels sont les liens qui restent inchangés.
- les points (3.1) et (3.2) introduisent les nouveaux liens. Le point (3.2) assure que la fonction α_i est une involution. Pour conclure sur cette définition, on peut remarquer qu’elle ne s’appuie pas sur les propriétés des n -G-cartes pour définir implicitement la nouvelle n -G-carte mais qu’elle énumère la totalité des éléments composant la nouvelle n -G-carte.

2.2.3 Rétro-définition

La définition mathématique 4 fournit une description exhaustive et systématique de la couture. Par contre elle ne retranscrit pas l’intuition véhiculée par la définition informelle qui est que l’on n’explique que le lien entre les

deux brins désignés par l'utilisateur et qu'on laisse "travailler" les propriétés du modèle. Nous nous proposons d'apporter à la fois rigueur et intuition en fournissant une définition mathématique abstraite au sein de laquelle on caractérise complètement le résultat de l'opération tout en explicitant le minimum de changements.

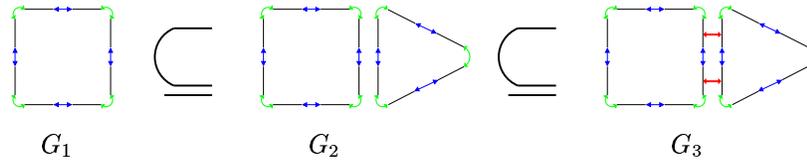


FIG. 6 – Le principe d'inclusion entre n -G-cartes.

Informellement, la couture de deux brins d et d' par α_i dans une n -G-carte implique que les brins des orbites $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d)$ et $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n \rangle (d')$ sont obligatoirement cousus correctement pour valider les propriétés du modèle. Cette explication informelle de la couture repose sur un fait implicite important qui est que les seules modifications effectuées sur la n -G-carte initiale sont le lien explicite entre d et d' et les liens résultant de ce lien pour satisfaire les propriétés du modèle. En d'autres termes, aucun lien supplémentaire n'a été effectué, et aucun brin n'a été ajouté ou supprimé. Pour définir rigoureusement cette notion de changement minimum, nous introduisons le principe d'inclusion entre n -G-cartes.

DÉFINITION 6 (INCLUSION ENTRE n -G-CARTES) Une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est **include** dans une n -G-carte $G' = (D', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ si et seulement si

- D est un sous-ensemble de D' ,
- pour tous brins d_1 et d_2 de D tels que $d_1 \neq d_2$, si $d_1 \alpha_i = d_2$, $i \in [0, n]$, alors $d_1 \alpha'_i = d_2$.

Ainsi le passage d'une n -G-carte à une autre par inclusion, consiste à ajouter des brins et/ou des liens. Dans l'exemple de la figure 6, le passage de G_1 à G_2 se fait en ajoutant les brins du triangle et leurs liaisons, et le passage de G_2 à G_3 se fait en liant le carré au triangle. Dans le modèle des n -G-cartes, les brins i -libres sont représentés par un point fixe de l'involution α_i . Comme l'indique la définition 6, seules les liaisons de ces points fixes sont susceptibles de changer par inclusion. À l'aide de la notion d'inclusion, nous redéfinissons la couture comme suit.

DÉFINITION 7 (COUTURE) Soient une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, un entier naturel $i \leq n$ et deux brins i -libres $d, d' \in D$. La plus petite n -G-carte $G' = (D', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ telle que

1. $G \subseteq G'$
2. $d \alpha'_i = d'$

est la n -G-carte résultant de la i -couture de d et d' dans G .

Comme la n -G-carte obtenue contient la n -G-carte initiale, nous conservons tous les brins et liens présents avant la couture. Le fait que les deux brins désignés soient liés dans la nouvelle n -G-carte assure non seulement la présence de ce lien mais aussi celle de tous les liens nécessaires à la cohérence des n -G-cartes le long de l'orbite adéquate. Enfin, comme nous considérons la plus petite n -G-carte contenant la n -G-carte initiale G et telle que les deux brins désignés d et d' sont cousus par α_i , nous assurons que les seules différences entre la n -G-carte obtenue et la n -G-carte G sont dues à la propagation des invariants. L'existence de cette n -G-carte peut facilement être prouvée⁵. À titre d'exemple, considérons la figure 7. En A , nous avons l'objet initial sur lequel est matérialisé la liaison par α_2 à effectuer entre d et d' . En l'état actuel, ce n'est donc pas une 2-G-carte. En B , la 2-G-carte résultant de la couture de d et d' par α_2 contient seulement une liaison supplémentaire par α_2 . La présence de cette liaison est la conséquence immédiate de la préservation des invariants du modèle : comme d et d' sont liés par α_2 , les brins $d \alpha_0$ et $d' \alpha_0$ doivent l'être aussi pour assurer que $\alpha_0 \alpha_2$ est une involution. En C , une 2-G-carte où la 2-couture entre d et d' a été effectuée correctement, mais qui contient des brins et des liaisons supplémentaires. De tels objets sont évités en ne conservant que la plus petite 2-G-carte. Enfin en D , la couture est aussi effectuée correctement mais la 2-G-carte initiale a été tronquée, elle ne contient donc pas la 2-G-carte de départ.

⁵Une façon simple de prouver l'existence et l'unicité de cette n -G-carte est de montrer qu'elle est la plus petite n -G-carte vérifiant la définition 6 de la couture.

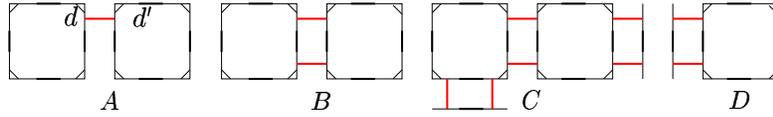


FIG. 7 – Exemple de couture.

Les définitions 6 et 7 ainsi que le modèle des n -G-cartes et des opérations comme l'isomorphisme entre deux orbites, ont toutes été formalisées en CASL [LAGB01]. Plus précisément, c'est de ce travail de spécification que découlent les définitions précédentes. Il en va de même pour l'opération de chanfreinage que nous abordons dans la section suivante.

3 Rétroconception du chanfreinage

Dans cette section, nous présentons tout d'abord une définition informelle du chanfreinage pour ensuite introduire notre définition abstraite.

3.1 Qu'est-ce que le chanfreinage ?

Prenons l'exemple de la figure 8. En A , nous avons la topologie d'un cube dont nous chanfreinons l'arête A et le sommet S . Dans le cas du chanfreinage du sommet S , on obtient une face triangulaire, car le sommet S était initialement bordé par trois faces (voir figure 8– B) alors que l'arête A est remplacée par une face à deux côtés (voir figure 8– C).

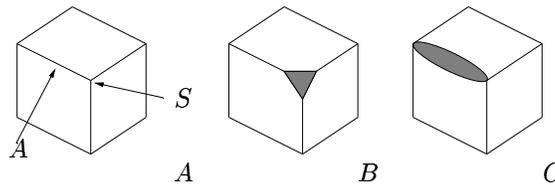


FIG. 8 – Exemples de chanfreinage.

Plus généralement, étant donnée une subdivision S de dimension n , chanfreiner une de ses cellules, notée C , consiste à remplacer cette cellule par une cellule de dimension n dont le nombre de cellules de dimension $n - 1$ la bordant est égal au nombre de cellules de dimension n incidentes à C .

Notons dès à présent qu'en tant que définition informelle, la définition du chanfreinage donnée précédemment n'explique pas ce que signifie le remplacement d'une cellule par une autre. En particulier comment connecte-t-on la nouvelle cellule au reste de l'objet qui est resté inchangé ? L'écriture d'une définition mathématique ou d'un algorithme permet de répondre à ce type de questions en décrivant complètement le résultat.

3.2 Définition abstraite du chanfreinage

Comme la couture, le chanfreinage a été défini mathématiquement et de façon exhaustive [Elt94]. Par souci de concision, nous ne donnons pas cette définition ici pour nous concentrer sur notre approche. Nous cherchons à identifier les modifications explicites et celles à laisser implicites lors du chanfreinage d'une cellule. Pour cela, nous traduisons la définition informelle du chanfreinage dans le modèle des n -G-cartes. Supposons que l'on dispose d'une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ et d'une i -cellule $C \subset G$ à chanfreiner, on doit :

1. construire une n -cellule C' telle que le nombre de $(n - 1)$ -cellules lui étant incidentes soit égal au nombre de n -cellules précédemment incidentes à C .
2. remplacer la cellule C par la nouvelle cellule C' .

La première étape consiste à construire une n -cellule à partir d'une i -cellule en respectant certaines contraintes sur le nombre de cellules incidentes. Cette étape est effectuée en considérant la notion de cellule duale.

DÉFINITION 8 (CELLULE DUALE) Soit une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que $\alpha_i = id|_D$, alors la n -G-carte $G' = (D', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ définie par :

- $D' = D$,
- $\forall d \in D, \forall k \in [0, n], k \neq i$
 - si $k < i, d\alpha'_k = d\alpha_k$,
 - si $k > i, d\alpha'_{k-1} = d\alpha_k$,

est appelée la n -G-carte **duale** de G . Elle a pour propriété que $\alpha'_n = id|_{D'}$.

Une i -cellule C incluse dans une n -G-carte G peut elle-même être considérée comme une n -G-carte telle que $\alpha_i = id$. Grâce à la définition précédente, on peut construire à partir d'une i -cellule C , une n -cellule dont le nombre de $n - 1$ cellules incidentes soit égal au nombre de n -cellules incidentes à C . Par exemple, à la figure 9, la cellule duale d'un sommet en A est obtenue en B , les liaisons α_1 et α_2 (qui ont toutes les deux une dimension supérieure à 0, c'est-à-dire à celle de la cellule considérée) deviennent respectivement des liaisons α_0 et α_1 . La cellule duale d'une arête en C est donnée en D . Une arête est de dimension 1, les liaisons α_0 restent donc inchangées, mais les liaisons α_2 deviennent des liaisons α_1 . Ces deux exemples sont traités dans une 2-G-carte.

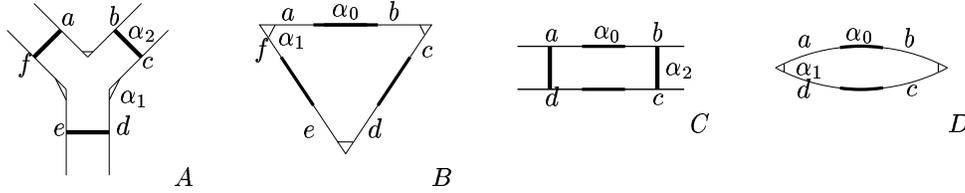


FIG. 9 – Deux exemples de cellules duales dans une 2-G-carte.

Si la création de la n -cellule duale se fait aisément, il faut maintenant pouvoir l'introduire dans la n -G-carte initiale. Il va de soi que cela ne peut se faire en remplaçant littéralement la i -cellule à chanfreiner par la n -cellule construite précédemment sous peine de ne pas pas pouvoir "recoller" la cellule au reste de la n -G-carte. Il faut en fait éclater la cellule de départ, construire la nouvelle cellule et les relier entre elles. C'est ce que nous faisons avec la définition suivante qui est commentée juste après.

DÉFINITION 9 (CHANFREINAGE) Soient une n -G-carte $G = (D, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ et une i -cellule

$C = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle (d)$ de G . Nous notons D_i l'ensemble des brins de C , et nous introduisons la famille $(D_j)_{j \in [i+1, n]}$ d'ensembles de brins tels que pour tout $j \in [i+1, n]$,

- $D \cap D_j = \emptyset$,
- pour tout $k \in [i+1, n], k \neq j, D_j \cap D_k = \emptyset$,
- il existe une bijection $\varphi^j : D_i \rightarrow D_j$.

Nous considérons en outre la n -G-carte éclatée $L = (D^L, \alpha_0^L, \dots, \alpha_n^L)$ qui est la plus grande n -G-carte incluse dans G et telle que $\forall d \in D_i, d\alpha_{i+1}^L = d$. Nous définissons alors la n -G-carte chanfreinée $I = (D^I, \alpha_0^I, \dots, \alpha_n^I)$ comme la plus petite n -G-carte contenant L et telle que :

1. $D^I = D \cup \bigcup_{j \in [i+1, n]} D_j$
2. pour tout $d \in D_i, d\alpha_{i+1}^I = d\varphi^{i+1}$
3. pour tout $d \in D_i, \text{ pour tout } k \in [i, n-1], d\varphi^k \alpha_{k+1}^I = d\varphi^{k+1}$
4. la cellule formée des brins $d\varphi^n$ avec $d \in D_i$, est la cellule duale de C .

La n -G-carte I est le résultat du chanfreinage de la cellule C dans la n -G-carte G .

Considérons la figure 10 où un sommet C est chanfreiné dans une 2-G-carte G . Sur la ligne du haut, nous représentons l'objet dans sa globalité, tandis que sur la ligne du bas, nous effectuons un zoom sur la cellule à chanfreiner.

- En A , l'objet de départ est représenté. À titre d'exemple, nous détaillons les transformations liées au brin d .
- En B , la cellule C est éclatée, c'est-à-dire que l'ensemble des brins de la cellule sont décousus par α_1 . Le "trou" ainsi formé permettra d'introduire la nouvelle face duale de C . Notons que c'est cette n -G-carte (et non la n -G-carte initiale) qui est incluse dans la n -G-carte finale. En effet, initialement (voir la figure 10-A) le brin d est lié

à son voisin, alors qu'au final (voir la figure 10-*F*) il est lié à un autre brin introduit ci-dessous. Cette n - G -carte éclatée (figure 10-*B*) est notée L dans la définition 9 et est elle-même définie comme incluse dans la n - G -carte de départ (figure 10-*A*).

- En C , nous présentons le traitement local au brin d . Pour ce brin on ajoute une chaîne de deux brins $d\varphi^1$ et $d\varphi^2$ tels que $d\alpha_1 = d\varphi^1$ et $d\varphi^1\alpha_2 = d\varphi^2$. Ce traitement est défini par les points 2 et 3 de la définition 9. Les fonctions $\varphi^{i+1}, \dots, \varphi^n$ permettent d'ajouter et de nommer les nouveaux brins dans la n - G -carte.
- En D , nous présentons l'ajout de la chaîne de brins pour tous les brins de la cellule C . La nouvelle face commence ainsi à prendre forme.
- En E , sont présentées les coutures de la nouvelle face, qui est la duale du sommet C de départ à chanfreiner. Cette face est constituée de tous les brins $d'\varphi_2$ introduits pour chaque brin d' du sommet de départ. On effectue donc les coutures entre ses brins selon la définition 8 qui est utilisée au point 4 de la définition 9.
- Le résultat de la figure 10-*E* n'est pas une 2- G -carte car certains liens manquent aux niveaux des brins intermédiaires entre la cellule C et sa cellule duale. Ces derniers liens résultent en fait des propriétés du modèle et ne sont donc pas explicites dans la définition 9. On obtient finalement le résultat de la figure 10-*F*.

Notons que plus la dimension de la n - G -carte est élevée, plus le nombre de coutures effectuées implicitement est grand.

Nous proposons ainsi une formalisation directe de la définition intuitive du chanfreinage. Seules les imprécisions de la description intuitive ont été comblées, en particulier la manière de lier la nouvelle face à la cellule de départ. Nous obtenons ainsi une définition rigoureuse, complète et intuitive du chanfreinage. Bien entendu, la complexité intrinsèque de l'opération de chanfreinage transparait dans sa définition. La définition 9 ne peut donc pas être qualifiée de claire et concise. Cependant les gains sur ces points par rapport à la définition précédemment proposée par H. ELTER [Elt94] sont significatifs. De plus, la proximité avec la description intuitive de l'opération en fait une référence de correction beaucoup plus sûre.

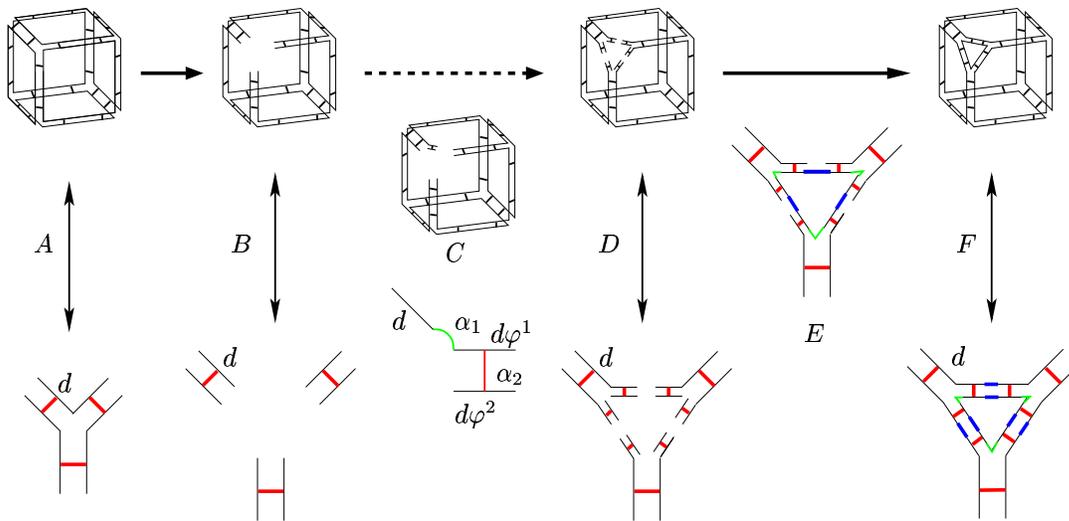


FIG. 10 – Arrondi fermé d'un sommet dans une 3- G -carte plongée.

3.3 Retombées algorithmiques

Même si cela peut paraître paradoxal, la définition 9 a des retombées algorithmiques directes. En fait, la recherche de critères minimaux nous permet d'isoler un comportement local à chaque brin et le travail des invariants du modèle. Dans le cas de la couture, le traitement local est simplement de lier deux brins ensemble, tandis que pour le chanfreinage, il consiste à ajouter une chaîne de $n - i$ brins. Ensuite, les invariants travaillent directement dans le cas de la couture et sont amorcés par les liaisons de la cellule duale dans le cas du chanfreinage. À titre d'exemple, l'algorithme de chanfreinage que nous avons implanté suit cette démarche : on parcourt l'ensemble des brins de la cellule à chanfreiner dans un ordre quelconque ; pour chaque brin d , on ajoute une chaîne de $n - i$ brins ; si les brins voisins de d dans la cellule à chanfreiner sont déjà traités, on effectue les coutures de la cellule duale et on explicite la propagation des invariants du modèle entre d et ses voisins.

Finalement, nous obtenons une définition mathématique du chanfreinage à la fois plus abstraite que la définition usuelle, mais aussi plus proche des algorithmes effectivement mis en œuvre qui sont locaux. Obtenir de tels algorithmes est important car ils permettent de s'affranchir de l'ordre de parcours des objets en simplifiant la programmation, ils suppriment presque totalement les préconditions en étant locaux et non plus globaux et ils se généralisent plus facilement à des dimensions quelconques.

4 Conclusion et perspectives

Dans le cadre de la modélisation géométrique à base topologique, nous proposons une nouvelle approche pour définir mathématiquement les opérations de transformations géométriques dans le modèle des n -G-cartes. La description proposée est basée sur l'inclusion entre n -G-cartes et repose sur la recherche de critères minimaux de modification.

Un intérêt majeur de notre approche est d'obtenir des définitions mathématiques plus proches du niveau informel et donc plus faciles à valider. Ce point est important pour conférer un degré de confiance plus fort à une nouvelle opération géométrique. En outre, nous avons vu que l'écriture de telles définitions abstraites met en évidence des considérations d'ordre algorithmique. Les algorithmes locaux basés sur le parcours d'un ensemble de brins et le traitement local de ceux-ci se déduisent plus facilement de nos définitions où le traitement local à chaque brin est identifié et les parcours se déduisent des invariants du modèle.

Nous avons déjà appliqué notre approche sur des opérations telles que l'extrusion et la triangulation, mais il serait intéressant de s'intéresser à des opérations plus complexes comme le produit cartésien ou les opérations booléennes. En outre, il faudrait tester notre approche sur d'autres modèles topologiques comme les cartes [Cor75], les chaînes de cartes [EL94], ou les ensembles simpliciaux [Lan95]. La même démarche minimaliste doit y être applicable à condition de changer le critère de modification minimale d'un objet.

Références

- [BM00] M. Bidoit and P. D. Mosses. A gentle introduction to CASL. Tutorial, CoFI Workshop at the 3rd European Joint Conferences on Theory and Practice of Software (ETAPS'2000), Berlin, Germany, April 2000.
- [CAS00] CoFI (common framework initiative) task group on language design. casl the common algebraic specification language summary, June 2000. <ftp://ftp.brics.dk/Projects/CoFI>.
- [Cor75] R. Cori. Un code pour les graphes planaires et ses applications. *Astérisque*, 27, 1975.
- [EL94] H. Elter and P. Lienhardt. Cellular complexes as structured semi-simplicial sets. In *International Journal of Shape Modeling*, volume 1, pages 191–217. 1994.
- [Elt94] H. Elter. *Étude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires*. PhD thesis, Université Louis-Pasteur de Strasbourg, 1994.
- [LA01] F. Ledoux and A. Arnould. Geospec : specification libraries for geometric modelling, sept. 2001. <http://www.sic.sp2mi.univ-poitiers.fr/GL/GeoSpec>.
- [LAGB01] F. Ledoux, A. Arnould, P. Le Gall, and Y. Bertrand. Geometric Modelling with CASL. In M. Cerioli and G. Reggio, editors, *Recent Trends in Algebraic Development Techniques*, number 2267 in Lecture Notes in Computer Science, pages 176–200. Springer Verlag, April 2001.
- [Lan95] V. Lang. *Une étude de l'utilisation des ensembles simpliciaux en modélisation géométrique interactive*. thèse, Université Louis Pasteur, L.S.I.I.T, Strasbourg, octobre 1995.
- [Lie89] P. Lienhardt. Subdivisions of n -dimensional spaces and n -dimensional generalized maps. In *Annual A.C.M. Symposium on Computational Geometry*, pages 228–236, Saarbrücken, R.F.A, June 1989.
- [Lie91] P. Lienhardt. Topological models for boundary representations : a comparison with n -dimensional generalized maps. *Computer-Aided Design*, 23(1) :59–82, 1991.
- [Mos99] P. D. Mosses. CASL : A guided tour of its design. *LNCS*, 1589 :216–240, 1999.