

Arrondi d'arêtes : de la topologie à la G^1 -continuité

Franck Ledoux¹, Laurent Fuchs²

¹ LaMI, UMR 8042, 523 Place des Terrasses, 91000 Évry Cedex

² IRCOM-SIC, UMR 6615, SP2MI, 86962 Futuroscope Cedex

fledoux@lami.univ-evry.fr, fuchs@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

Résumé : L'opération d'arrondi d'arêtes dans des objets surfaciques consiste à remplacer des arêtes vives par des surfaces aux formes arrondies. Nous en proposons une version générale qui permet de traiter un nombre quelconque d'arêtes dans un objet avec des arrondis différents pour chaque arête et l'éclatement ou non des sommets incidents. Cette approche est rendue possible par l'utilisation d'une structure topologique sous-jacente qui permet d'isoler et d'identifier le traitement à effectuer au niveau des sommets incidents aux arêtes à arrondir. Une fois la topologie du nouvel objet déterminé, nous lui associons une géométrie à l'aide de surfaces de Bézier triangulaires et quadrangulaires. Pour toutes les configurations, la G^1 -continuité est assurée entre ces différentes surfaces en prêtant une attention toute particulière aux régions qui remplacent les sommets incidents aux arêtes à arrondir.

Mots-clés : Arrondi d'arêtes, topologie, plongement linéaire et surfacique, G^1 -continuité, surfaces de Bézier.

1 Introduction

En modélisation géométrique, L'arrondi d'arêtes consiste à remplacer les arêtes vives d'un objet par des surfaces planes ou arrondies pour obtenir un objet plus lisse. Cette opération est fréquemment utilisée car la plupart des objets de la vie courante possèdent des formes arrondies pour des raisons d'esthétisme, de sécurité ou de procédé de fabrication. Bien que cette opération soit largement étudiée [VMV94], il n'existe à notre connaissance aucune solution réellement générale au sens que l'on puisse arrondir n'importe quelle arête d'un objet avec des paramètres propres à chaque arête. Par exemple, considérons l'objet de la figure 1–A qui est typique des difficultés rencontrées lors de l'arrondi d'arêtes. Nous n'arrondissons que les arêtes en traits gras avec des arrondis plus ou moins importants. En remplaçant ces arêtes par des faces planes, nous obtenons l'objet de la figure 1–B. Si maintenant, nous introduisons des surfaces arrondies, nous obtenons l'objet de la figure 1–C. Dans les deux cas, le problème majeur est le traitement à effectuer sur les sommets incidents aux arêtes arrondies. Ce traitement est conditionné par la topologie de l'objet en ces sommets.

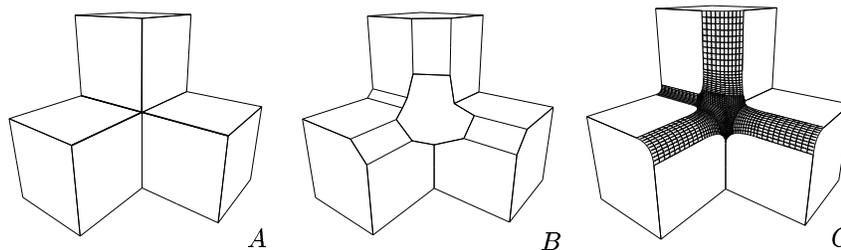


FIG. 1 – Arrondi de quatre arêtes d'un objet géométrique.

L'importance de la topologie aux extrémités des arêtes justifie l'utilisation d'un modèle géométrique tenant compte de la topologie de l'objet. Dans ce cadre, un objet géométrique est représenté en mettant en évidence sa topologie, c'est-à-dire sa subdivision en sommets, arêtes, faces, etc. La géométrie (courbes et surfaces) d'un objet est alors obtenue en associant une géométrie à chaque élément de la subdivision. On associe par exemple une courbe à une arête et une surface à une face. Cette association est appelée un *plongement*. Cette représentation des objets permet de découper les opérations en deux parties, l'une topologique qui modifie la structure des objets, et l'autre géométrique qui modifie leurs plongements. Ce découpage assure entre autres d'obtenir des définitions plus générales des opérations de transformation [Elt94] et de réduire les temps de calcul et les risques d'erreurs. En

effet, la présence d’une structure topologique permet de construire des objets complexes constitués de nombreuses primitives simples tout en conservant un accès efficace à chacune de ces primitives.

Dans le cas des figures 1–*A* et 1–*B*, nous parlons d’objets filaires. Les travaux de H. ELTER et L. FUCHS [EF94, Elt94] définissent une opération d’arrondi d’arêtes sur ce type d’objets, en tenant compte de la topologie. En nous basant sur les algorithmes développés dans leurs travaux, nous avons étudié les principes généraux de l’opération d’arrondi d’arêtes que nous avons ensuite généralisée via une définition plus abstraite [Led02]. Nous obtenons une plus grande souplesse dans le choix des paramètres, une extension aux objets volumiques et la déclinaison de plusieurs versions d’arrondi. Le travail d’abstraction que nous avons effectué permet de ne se soucier d’aucun détail d’implantation, ce qui facilite la généralisation des algorithmes. Nous présentons le résultat de ce travail dans la première section de cet article en introduisant l’opération d’arrondi d’arêtes d’objets filaires.

Dans la seconde partie de cet article, nous plongeons les faces introduites lors de l’opération d’arrondi par des surfaces de Bézier, ce qui nous permet d’obtenir des résultats tels que celui de la figure 1–*C*. Nos travaux s’appuient sur ceux de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD [VR95, VR97] qui fournissent une opération d’arrondi d’arêtes avec éclatement des sommets. L’introduction de surfaces paramétriques amène à se poser la question de la gestion de la continuité, tout en conservant la généralité de l’approche avec plongement linéaire. En l’occurrence, nous proposons une méthode générale d’arrondi d’arêtes avec plongement surfacique assurant la G^1 -continuité [Far02]. La partie topologique de cette opération est similaire à celle de l’opération d’arrondi d’arêtes sur les objets filaires. Quant à la partie géométrique, elle s’inscrit parmi les méthodes de réseaux [Fjä86, Chi88, SN91, EF94] qui consistent à définir des surfaces en assurant le degré de continuité nécessaire entre elles. L’approche de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD [VR95, VR97] fournit la G^1 -continuité mais ne traite qu’un seul type d’arrondi en introduisant une gestion intéressante des surfaces qui remplacent les sommets incidents aux arêtes à arrondir. Nous étendons cette approche pour obtenir une opération générale.

L’implantation de l’arrondi d’arêtes que nous proposons est effectuée en considérant le modèle topologique des n -*G*-cartes [Lie91]. Le modèle de plongement est un simple plongement linéaire qui donne une représentation “filaire” des objets, ou un plongement surfacique utilisant les surfaces de Bézier. Cette implantation est réalisée au sein du modèleur *Moka* [Vid01].

Dans cet article, nous ne présentons qu’intuitivement notre méthode d’arrondi d’arêtes. Le lecteur intéressé pourra toutefois se référer à [Led02] où l’ensemble des détails techniques sont développés.

2 Arrondi avec plongement linéaire

Nous proposons une méthode locale d’arrondi d’arêtes permettant à l’utilisateur de sélectionner les arêtes qu’il veut arrondir dans un objet, la façon dont il veut les arrondir et s’il veut aussi arrondir les sommets incidents. La difficulté inhérente à ce type d’approches se situe dans le traitement des sommets incidents aux arêtes à arrondir. Il faut pouvoir définir de façon systématique, homogène et pertinente le traitement à effectuer en tout sommet, et ce quelque soit le nombre d’arêtes incidentes et les paramètres d’arrondis choisis. La prise en compte de la topologie de l’objet géométrique au sein du modèle de représentation est donc primordiale. Pourtant, à notre connaissance, seuls les travaux de H. ELTER et L. FUCHS s’appuient réellement sur la présence d’un modèle topologique [EL94, Elt94]. C’est sur ces travaux que sont basés les résultats présentés dans cette section.

Comme H. ELTER et L. FUCHS, nous séparons au maximum les traitements géométriques et topologiques, ce qui favorise la généralité de notre approche. Nous commençons cette section en présentant intuitivement le résultat attendu. Le point important de la construction effectuée est le traitement topologique aux sommets incidents aux arêtes à arrondir. Nous introduisons ensuite les traitements topologiques et géométriques réellement effectués.

2.1 Construction intuitive

Arrondir une arête isolée dans un objet polyédrique est une tâche relativement aisée à condition de traiter avec attention ses sommets incidents. Par contre, les choses se compliquent dès que l’on arrondit plusieurs arêtes. De manière générale, le problème posé revient à déterminer la topologie d’une face qui remplacera un sommet incident à n arêtes parmi lesquelles m arêtes sont arrondies ($m \leq n$). Il faut ajouter à cela que les arêtes ne sont pas toutes arrondies de la même façon et que le sommet lui-même peut être arrondi. Ce problème très général n’est habituellement que partiellement résolu, des hypothèses étant faites pour ne considérer que certaines confi-

gurations [Fjä86, Chi88, SN91, VR97]. L'approche de H. ELTER et L. FUCHS fournit une solution plus générale car ils permettent d'arrondir autant d'arêtes que l'on souhaite, mais sous certaines conditions tout de même. En l'occurrence, sur la figure 2–A, les *arêtes de coupe* ar_1 et al_1 qui définissent l'influence de l'arrondi de l'*arête à arrondir* a_1 sur ses faces incidentes doivent être parallèles à l'arête a_1 . Pour notre part, nous levons cette contrainte en permettant par exemple à l'arête al_3 de ne pas être parallèle à l'arête a_3 . De plus, nous ajoutons des paramètres permettant d'arrondir les sommets incidents aux arêtes à arrondir. On parle d'*éclatement de sommet*. Pour un sommet incident à une arête à arrondir, on définit pour chacune de ses arêtes incidentes, un *point d'éclatement* qui caractérise l'éclatement du sommet initial relativement à cette arête. Dans le cas du sommet S , si l'on n'arrondissait pas ses arêtes incidentes et que l'on disposait d'un point d'éclatement pour chacune d'elles, le sommet S serait remplacé par une face triangulaire dont les sommets seraient les points d'éclatement. Sur la figure 2–A, un point d'éclatement est associé au sommet S relativement à l'arête a_3 . Le sommet S est appelé un *sommet à arrondir*.

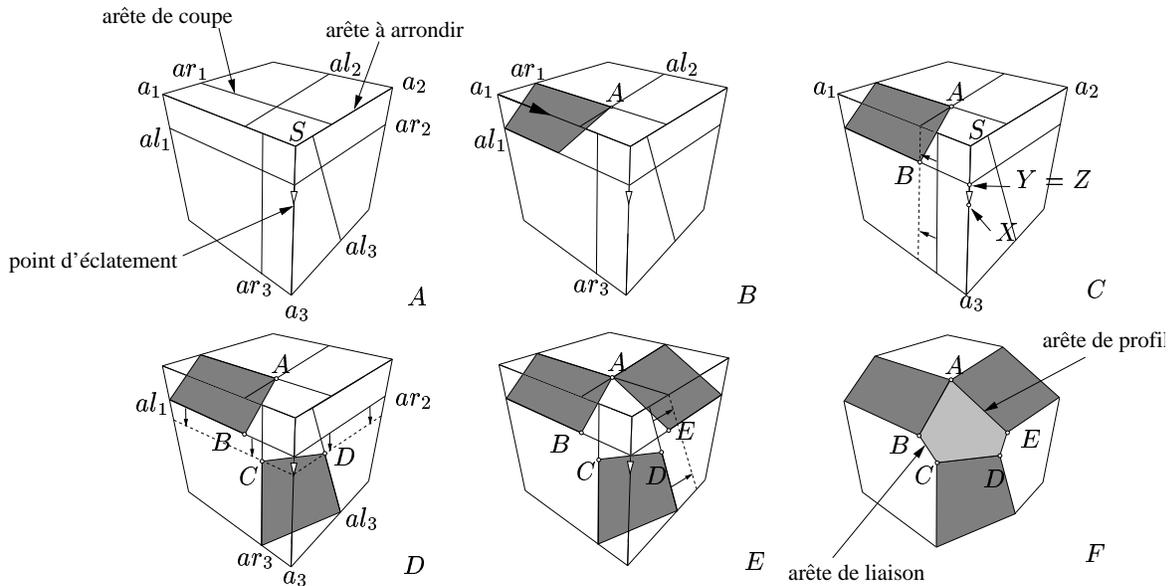


FIG. 2 – Détermination de la zone d'influence en un sommet à arrondir.

En un sommet à arrondir, plusieurs arrondis d'arêtes peuvent se rencontrer et la topologie de la face qui remplacera ce sommet est alors sous l'influence conjuguée de plusieurs arrondis. La démarche préconisée est de déterminer pour chaque arête la plus grande zone pour laquelle nous maîtrisons complètement son comportement. Considérons la figure 2–A qui représente un cube dont nous voulons arrondir les arêtes a_1 , a_2 et a_3 . L'arête a_3 est arrondie de façon non homogène et le sommet S est éclaté dans la direction de a_3 .

Commençons par l'arête a_1 et déterminons la plus grande zone pour laquelle nous savons définir son arrondi (voir figure 2–B). Si l'arête a_1 avait été la seule à arrondir, nous aurions coupé le cube par une surface reposant sur les arêtes de coupe al_1 et ar_1 . De façon analogue, commençons la coupe de l'arête a_1 par l'extrémité opposée à S , comme l'indique la flèche. Nous maîtrisons cette "coupe" tant que l'on ne rencontre pas un autre arrondi agissant sur une même face que l'arrondi de a_1 . En l'occurrence, l'arrondi de a_1 rencontre celui de a_2 puis celui de a_3 . L'influence de la zone d'arrondi de a_1 sur la face contenant l'arête ar_1 s'arrête donc au point A qui est l'intersection des arêtes ar_1 et al_2 (voir figure 2–B). Nous fermons la surface d'arrondi associée à l'arête a_1 en reliant le point A au point B qui est sur l'arête al_1 (voir figure 2–C). Ce point est obtenu en effectuant un report de l'arête ar_3 . Il tient ainsi compte de la prédominance de l'arrondi de a_2 .

Intéressons-nous maintenant à l'arrondi de l'arête a_3 . Au voisinage de S , il est sous l'influence des arrondis de a_1 et a_2 et de l'éclatement de S dans la direction de a_3 . Afin de déterminer la zone d'influence au sommet, on compare les positions des points X , Y et Z . Dans le cas présent, le point le plus éloigné de S est le point X qui caractérise l'influence de l'éclatement de S (voir figure 2–C). Pour construire la surface d'arrondi associée à l'arête a_3 , on pose donc les points C et D comme l'intersection de ar_3 et de la translatée de al_1 d'une part, et de al_3 et de la translatée de ar_2 d'autre part. Enfin, on procède de même pour l'arête a_2 pour obtenir le résultat de la figure 2–E. On obtient au final une surface à cinq côtés sur la figure 2–F. Cette surface est appelée la *zone d'influence maximale* au sommet S . Les arêtes $[A, B]$, $[C, D]$ et $[A, E]$ sont appelées des *arêtes de profil* et les

arêtes $[B, C]$ et $[D, E]$ sont appelés des *arêtes de liaison*.

La construction géométrique que nous venons d'effectuer se systématisé à toutes les configurations possibles. Il suffit pour cela de se placer dans un cadre topologique et d'effectuer quelques calculs simples d'intersections et de reports d'arêtes.

2.2 Construction pratique

Basé sur la notion de zone d'influence maximale, notre algorithme se décompose en deux étapes : la première, purement topologique, consiste à créer une *topologie générique* ; la seconde étape, à la fois topologique et géométrique, supprime certaines arêtes de la topologie générique tout en calculant le plongement de sommets. Ce découpage privilégie la topologie et permet d'obtenir une opération extensible au traitement d'objets de dimensions supérieures (i.e. des volumes).

2.2.1 Topologie générique

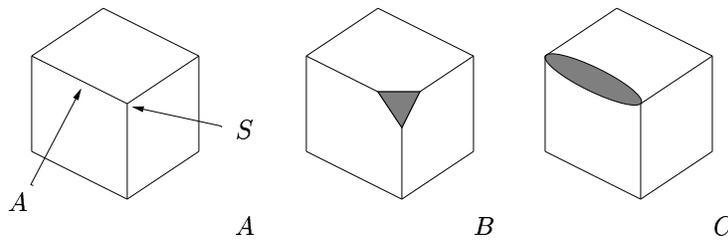


FIG. 3 – Chanfreinage d'un sommet et d'une arête.

Considérons un sommet à arrondir S incident à n arêtes dont m sont arrondies ($m \leq n$). Selon la position des arêtes de coupe et l'amplitude de l'éclatement de S , la face à introduire à la place de S peut avoir entre m et $m + n$ côtés. Dans le cas minimal, seules les arêtes de profil sont introduites. Dans le cas maximal, les arêtes de profil et toutes les arêtes de liaison sont présentes. La démarche préconisée par H. ELTER et L. FUCHS et que nous adoptons ici, est de créer toutes les arêtes de liaison possibles puis de supprimer celles qui sont inutiles. La topologie contenant toutes les arêtes de profil et de liaison est appelée *topologie générique*. L'obtention de cette topologie est aisée dès lors que l'on dispose de l'opération de chanfreinage qui est une opération purement topologique [Elt94, Led02]. Étant donnée une subdivision S de dimension n , chanfreiner une de ses cellules, notée C , consiste à remplacer cette cellule par une cellule de dimension n dont le nombre de cellules de dimension $n - 1$ la bordant est égal au nombre de cellules de dimension n incidentes à C . Par exemple, sur la figure 3, le sommet S incident à trois faces est remplacé par une face à trois côtés en B , et l'arête A incidente à deux faces est remplacée par une face à deux côtés en C .

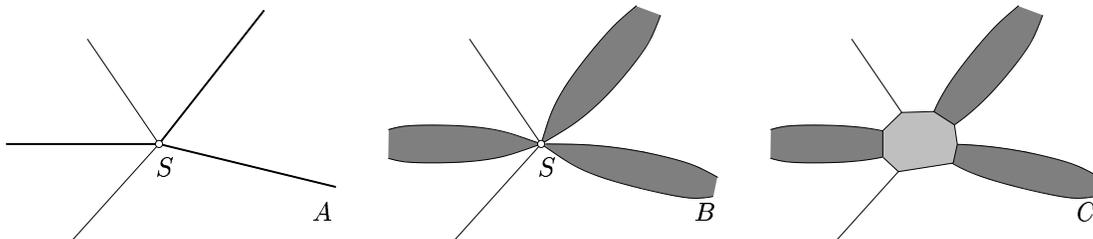


FIG. 4 – Obtention de la topologie générique.

À l'aide du chanfreinage, la topologie générique s'obtient simplement en chanfreinant les arêtes à arrondir puis les sommet incidents à ces arêtes. Ainsi, sur la figure 4, nous arrondissons trois arêtes parmi cinq. Partant de la configuration A , nous chanfreinons les trois arêtes désignés pour obtenir la configuration B , à partir de laquelle nous chanfreinons le sommet S pour obtenir la configuration C qui correspond à la topologie générique. Cette dernière comporte les arêtes de profil nécessaires ainsi que toutes les arêtes de liaison possibles.

2.2.2 Topologie effective et plongement

Une fois la topologie générique créée, il faut encore déterminer quelles sont les arêtes de liaison à supprimer pour obtenir la *topologie effective* après l'arrondi d'une ou plusieurs arêtes.

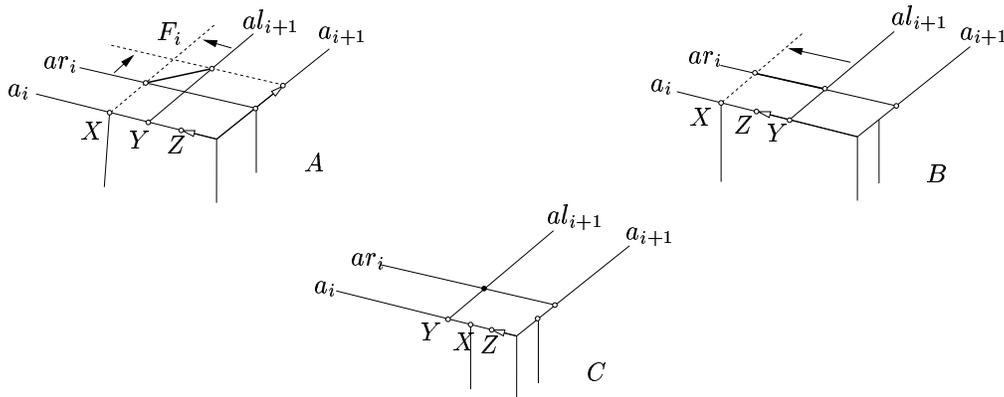


FIG. 5 – Présence ou non d'une arête de liaison.

Déterminer si une arête de liaison doit être conservée ou non dépend des arrondis d'arêtes ayant une influence sur la face F_i contenant l'arête en question. On distingue alors trois cas possibles représentés sur la figure 5. L'arête de liaison peut :

- être distincte des arêtes de coupe (cas *A*),
- être portée par une arête de coupe (cas *B*),
- ne pas exister (cas *C*).

Prenons le cas de l'arête a_i . On récupère le point le plus éloigné de S entre l'éclatement du sommet relativement à a_i (Z) et les points d'intersection de a_i avec les deux arêtes de coupe susceptibles de l'intersecter (X et Y). C'est ce point, noté X_i pour l'arête a_i , qui délimite la face qui remplace le sommet le long de a_i . Une fois le point X_i défini, deux cas peuvent se présenter :

- le point X_i est déterminé par l'arête de coupe contenue sur la face F_i . L'extrémité de l'arête de profil relative à a_i et appartenant à F_i est alors l'intersection de ar_i et de al_{i+1} . C'est le cas de l'arête a_i dans le cas *C*.
- le point X_i est déterminé par l'éclatement de sommet relatif à a_i ou par l'autre arête de coupe intersectant a_i . L'extrémité de l'arête de profil relative à a_i et appartenant à F_i est alors l'intersection de ar_i et du report de l'arête al_{i+1} au point X_i . C'est le cas de l'arête a_i dans les cas *A* et *B*.

L'existence d'une arête de profil sur la face F_i dépend donc seulement de la comparaison des positions de trois points sur les arêtes a_i et a_{i+1} . Si jamais les deux points les plus éloignés sont produits par les arêtes de coupe contenues dans F_i , l'arête de liaison de la face F_i n'existe pas (voir figure 5–*C*). Dans le cas contraire, elle existe (voir figures 5–*A* et 5–*B*). En traitant de cette façon tous les sommets incidents aux arêtes à arrondir, tous les nouveaux sommets sont directement calculés comme étant des intersections entre arêtes de coupe (reportées ou non).

2.3 Exemples

Nous achevons cette section en présentant quelques exemples d'arrondi d'arêtes sur une configuration usuelle formée de quatre cubes (voir figure 6). La particularité de cette configuration est l'alternance entre arêtes concaves et convexes au sommet commun aux quatre cubes. Ce sommet est incident à six arêtes que l'on va arrondir de plusieurs façons. Dans les deux premières lignes, nous arrondissons une arête puis deux, puis trois, ... , pour finalement arrondir les six arêtes incidentes au sommet commun aux quatre cubes. la seconde ligne s'achève avec l'arrondi de toutes les arêtes de l'objet surfacique deux et trois fois. La dernière ligne présente des objets légèrement différents. À gauche, le cube du dessus a été déformé, ce qui donne après trois arrondis successifs l'objet juste à sa droite. Les deux derniers objets illustrent l'arrondi d'une configuration différente des quatre cubes.

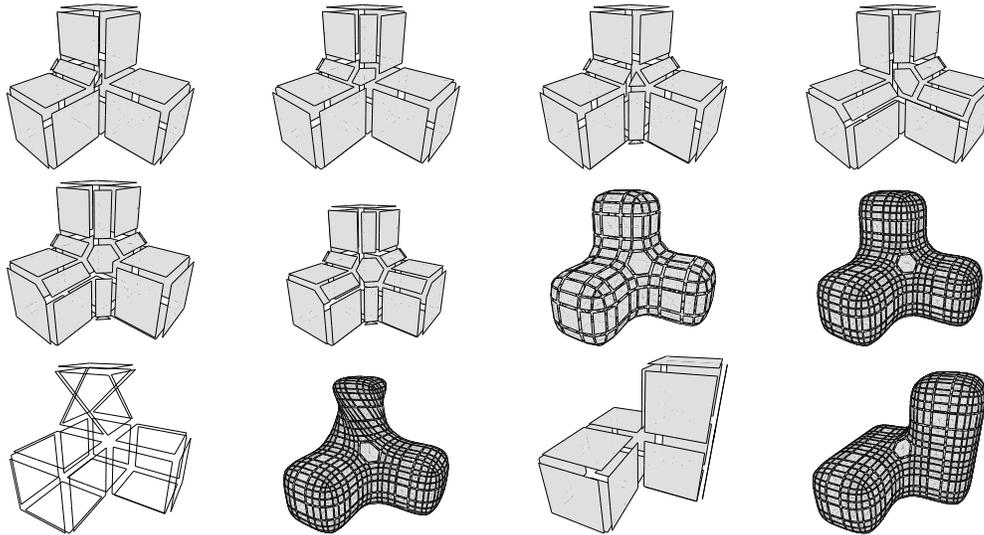


FIG. 6 – Différents arrondis possibles d'une configuration classique de quatre cubes.

3 Arrondi avec plongement surfacique

Dans cette section, nous présentons intuitivement notre méthode d'arrondi d'arêtes avec des carreaux de surfaces, en mettant en avant ses caractéristiques et les difficultés à prendre en compte. De ce fait, nous ne rentrons pas dans des détails techniques qui sortent du cadre de cet article.

3.1 Définition d'un arrondi général

L'aspect topologique de l'arrondi avec plongement surfacique est identique à celui de l'arrondi avec plongement linéaire. Seul le traitement de la géométrie change en plongeant désormais une arête par une courbe de Bézier et une face par un carreau surfacique de Bézier. La difficulté est maintenant de gérer la continuité entre les surfaces. Nous nous appuyons sur les travaux de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD [VR95, VR97] qui proposent une méthode d'arrondi d'arêtes avec éclatement des sommets. Cette méthode introduit des surfaces de Bézier quadrangulaires tout en assurant la G^1 -continuité interne¹. Cependant, elle ne fonctionne que si toutes les arêtes incidentes en un sommet sont arrondies et que toutes les arêtes de liaison de la topologie générique sont conservées. Nous généralisons cette approche à toutes les configurations possibles en un sommet.

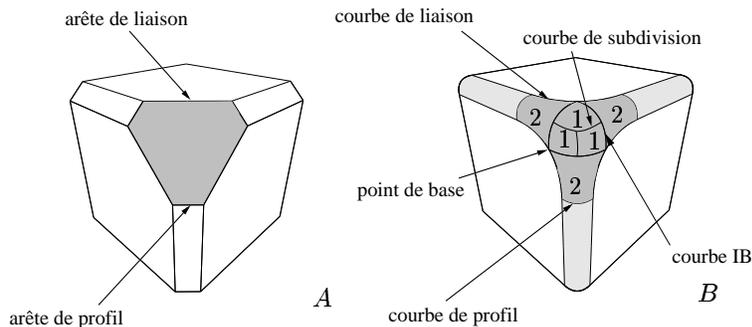


FIG. 7 – Association d'une géométrie à une topologie générique.

Tout d'abord, regardons le cas traité par T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD et faisons la correspondance avec notre approche topologique. Considérons la figure 7 où les trois arêtes incidentes au sommet d'un cube sont arrondies avec prédominance de l'éclatement de ce sommet. En A, la face remplaçant ce sommet est de topologie générique,

¹C'est-à-dire la G^1 -continuité entre toutes les surfaces introduites lors de l'arrondi.

c'est-à-dire que toutes les arêtes de liaison sont conservées. En B , est représentée la géométrie associée en suivant l'approche de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD. Une arête de profil est plongée par une *courbe de profil*, et une arête de liaison est plongée par une *courbe de liaison*. Les milieux géométrique² de ces courbes sont appelés les *points de base* et ce sont les extrémités des *courbes de bord*, ou *courbes IB*. Ces courbes découpent la région au sommet en deux régions : la *région de retrait* composée de *carreaux de retrait* (notés 2 sur la figure 7), et la *région intérieure* qui est subdivisée en *carreaux intérieurs* (notés 1 sur la figure 7). La région intérieure est elle-même découpée en carreaux intérieurs suivant les *courbes de subdivision*. Finalement, on plonge la face grisée de la figure 7– A par le pavage des surfaces grisées de la figure 7– B .

Pour obtenir une opération générale, il faut pouvoir n'arrondir que certaines arêtes avec des paramètres différents. Ceci nous oblige à envisager deux cas :

- des arêtes de profil sont supprimées ;
- des arêtes de liaison sont supprimées.

Le premier cas implique l'introduction de surfaces de retrait triangulaires. En effet, lorsqu'une courbe de profil est supprimée, la région de retrait incidente à cette arête n'a plus que trois côtés. Le second cas nécessite de prêter une attention particulière à la topologie aux points de base : supprimer une arête de liaison implique que le point de base qui en était le milieu va être à l'intersection de deux courbes de profil. En fait, dans pareil cas, ce point est incident à six courbes au plus : deux arêtes de coupe, deux courbes IB et deux courbes de profil. Une étude détaillée montre qu'il existe quatre topologies possibles en un point de base (voir figure 8) : le cas A où le point B_1 est incident à 4 courbes (aucune courbe de liaison n'a été conservée et il n'y a aucune région de retrait de sommets) ; le cas B qui est le seul cas où l'arête de liaison est conservée, le point B_1 est alors incident à 4 courbes ; le cas C où le point B_1 est incident à 6 courbes ; le cas D où le point B_1 est incident à 5 courbes.

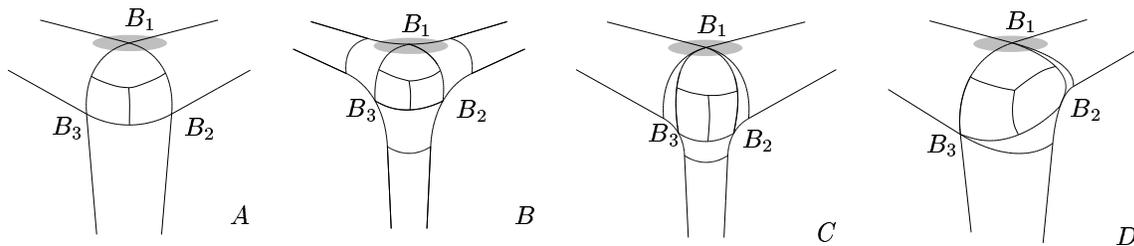


FIG. 8 – Les différentes topologies aux points de base.

Quelque soit la configuration considérée, la détermination des différentes courbes et surfaces nécessite de tenir compte de contraintes de continuité. En l'occurrence, il faut assurer la continuité entre les carreaux de surfaces adjacents le long d'une courbe, et entre plusieurs surfaces incidentes à un même sommet. La seconde condition est la plus difficile à vérifier, en particulier au voisinage des points de base. C'est pourquoi, notre algorithme, comme celui de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD, traite prioritairement ce point. Même si l'on effectue le même traitement que T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD dans le cas B , le découpage de notre algorithme est différent du leur pour des raisons de généralité. Intuitivement, les différentes étapes sont (voir figure 9) :

1. construire les courbes de profil et de liaison ;
2. construire les surfaces d'arrondi d'arêtes en assurant la continuité avec les faces initiales de l'objet ;
3. créer les courbes IB en tenant compte de la continuité aux points de base qui sont ses extrémités ;
4. déterminer la position du point central et son plan tangent associé selon un critère de moindres carrés. La position du point central dépend d'un coefficient de profondeur permettant des arrondis plus ou moins pointus ;
5. assurer la continuité au voisinage des points de base B_i ;
6. assurer la continuité entre la région intérieure et les régions de retrait par l'introduction d'une fonction commune de dérivée transversale [VR95] le long de chaque courbe les séparant ;
7. construire les régions de retrait en se préoccupant de la continuité avec les faces initiales de l'objet ;
8. construire la région intérieure, ce qui revient à poser les courbes de subdivision en tenant compte de la continuité au point central puis à assurer la G^1 -continuité le long des courbes de subdivision.

Afin d'illustrer les difficultés rencontrés, intéressons-nous à la gestion de la continuité au voisinage d'un point de base.

²C'est-à-dire le point de la courbe la séparant en deux arcs de même longueur.

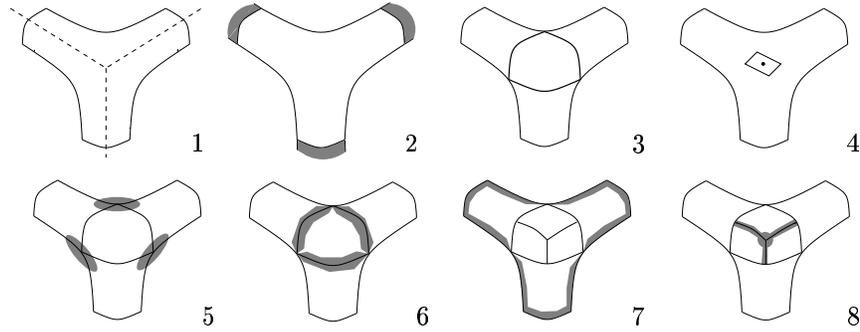


FIG. 9 – Déroulement de l'arrondi d'arêtes.

3.2 Continuité en un point de base

Pour assurer la G^1 -continuité interne en un point de base B_i dans tous les cas, il est nécessaire de satisfaire deux critères [Pet91, YN95] : les tangentes de toutes les courbes incidentes à B_i doivent être coplanaires en B_i ; leurs courbures en B_i doivent être “compatibles”. En d'autres termes, il existe une surface de courbure continue au voisinage de B_i sur laquelle reposent les courbes incidentes à B_i . Si le premier critère est facilement vérifiable, le second demande un traitement plus évolué. T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD proposent une construction simple permettant de respecter ce critère dans le cas B de la figure 8 où quatre courbes sont incidentes à B_i . Ils construisent la surface grisée de la figure 10–A, appelée *surface de recouvrement*, sur laquelle on fait reposer localement toutes les courbes incidentes au point B_i . Cette surface est construite à l'aide d'un *carreau de Coons* [Far02].

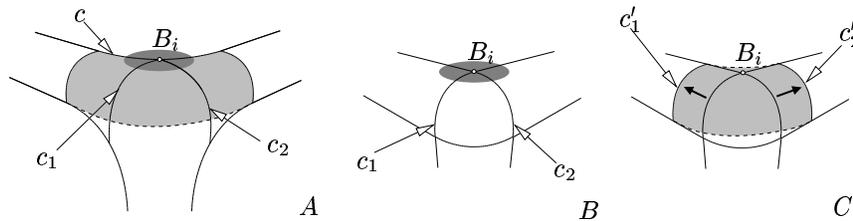


FIG. 10 – Surface de recouvrement.

L'adaptation directe de la construction de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD aux cas A , C et D de la figure 8 n'est pas possible. En effet, la surface posée sur la figure 10–A repose sur la courbe de liaison c qui n'existe plus dans les cas A , C et D . Par exemple, dans le cas A (voir figure 10–B), les courbes de profil c_1 et c_2 s'intersectent directement en B_i . Nous adoptons la méthode de T. VÁRADY et A. L. ROCKWOOD, nous proposons une construction simple qui approxime la région au point B_i . En fait, nous posons une surface de recouvrement qui approxime la position du point B_i et celles des arêtes de coupe qui lui sont incidentes. On construit ainsi une surface telle que celle de la figure 10–C où les arêtes c'_1 et c'_2 sont des translatés des arêtes de profil c_1 et c_2 .

Quelque soit la topologie au point B_i , nous définissons donc une surface de recouvrement sur laquelle nous récupérons la courbure normale de chacune des courbes à construire. Par exemple, considérons une courbe IB définie comme appartenant à un triangle formé des extrémités de la courbe IB considérée, c'est-à-dire des points de base, et d'un point de l'arête à arrondir initiale. Sur la figure 11–A, la courbe IB c est contenue dans le triangle formé par les points B_1 , B_2 et I_1 . Il faut que la courbure de c en B_1 soit compatible avec celles des autres courbes incidentes à B_1 . Dans le cas de la figure 11, le point B_1 est de configuration B (voir figure 8), nous construisons donc une surface de recouvrement dont nous récupérons la courbure normale relativement à la section normale P (voir figure 11–C). Nous déduisons la courbure de la courbe c par application du *théorème de Meusnier* [Car76], qui exprime la courbure de la courbe c en fonction d'une courbure normale de la surface de recouvrement. Dans la pratique, tous ces développements s'accompagnent de calculs importants sur les courbes et les surfaces traitées.

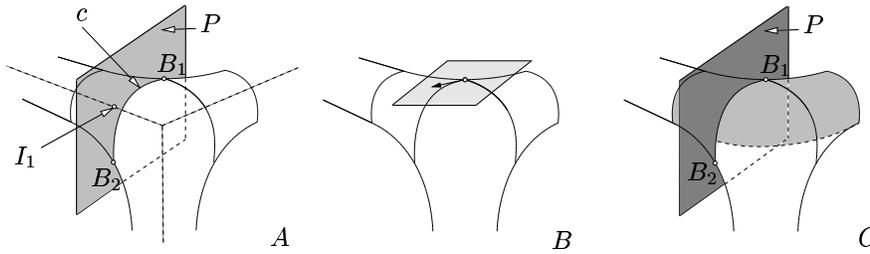


FIG. 11 – Contraintes sur les courbes IB .

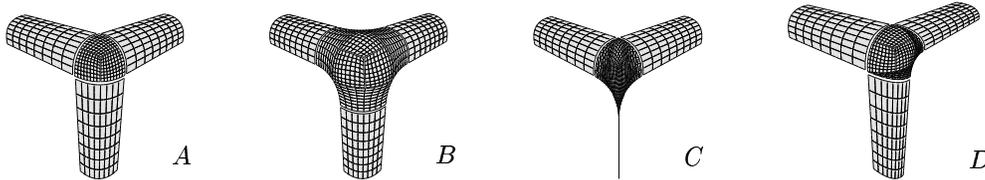


FIG. 12 – Sommet d'un cube dans les cas A , B , C et D .

3.3 Exemples

Nous commençons ces exemples par la figure 12 qui illustre le résultat obtenu pour chacun des cas particuliers de la figure 8. Ensuite, sur la figure 13 nous reprenons la configuration des quatre cubes traitée dans la section précédente. Nous arrondissons une arête puis deux, puis trois, . . . , pour finalement arrondir les six arêtes incidentes au sommet commun aux quatre cubes.

4 Conclusion

Nous avons développé une opération générale d'arrondi d'arêtes avec un plongement filaire ou surfacique. Pour atteindre un degré élevé de généralité, nous avons utilisé une approche topologique, mais nous avons aussi mené un travail important d'abstraction qui nous fournit une description précise, et indépendante de toute implantation dans le cas du plongement filaire. Ce dernier point présente l'avantage d'autoriser une généralité impossible à atteindre avec une approche programmatoire pragmatique. De plus, notre opération sur les objets filaires se généralise aux dimensions supérieures [Led02]. Cette généralisation permet par exemple de creuser des galeries dans des volumes en surmontant les problèmes de pincement qui peuvent survenir lors de l'arrondi d'arêtes en des sommets à la topologie complexe.

L'étude de l'arrondi avec plongement surfacique fournit un résultat en accord avec l'arrondi avec plongement linéaire et assure la G^1 -continuité interne. L'opération obtenue fournit un résultat satisfaisant dès lors que l'objet et les paramètres considérés sont "raisonnables". Cependant quelques points méritent d'être améliorés. Par exemple, les courbes IB telles que nous les posons actuellement sont bien construites à leurs extrémités (les points de base) mais nous ne maîtrisons par contre pas suffisamment le comportement en leurs milieux. À la suite de ce travail, nous avons acquis une expertise suffisante qui va nous permettre de remodeler plus en profondeur notre algorithme afin d'en améliorer quelques points et de gérer la G^1 -continuité externe.

Références

- [Car76] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [Chi88] H. Chiyokura. *Solid Modeling with DESIGNBASE, Theory and Implementation*, 1988.
- [EF94] H. Elter and L. Fuchs. Topologie de l'opération d'arrondi d'arêtes. *revue internationale de CFAO et d'infographie*, 9(6) :807–829, 1994.

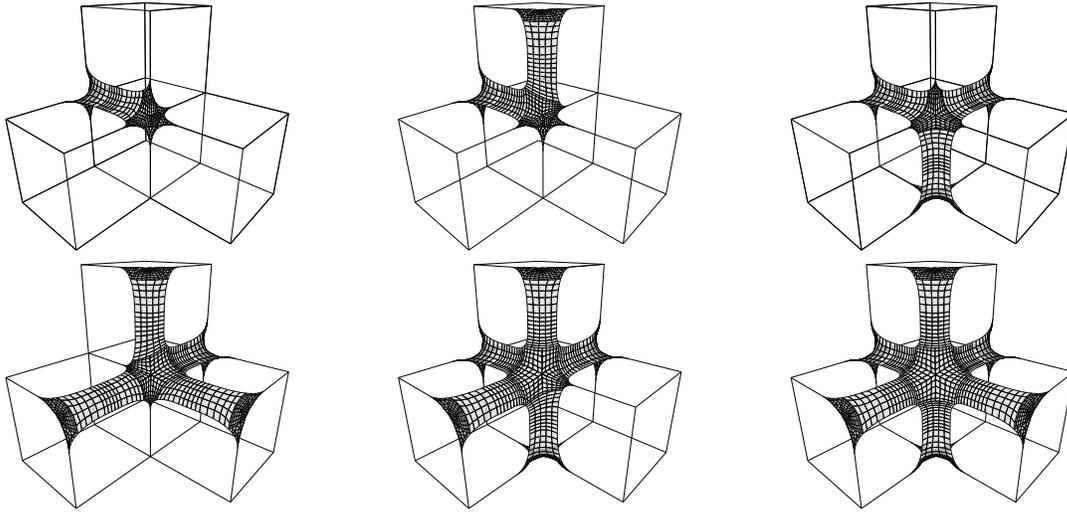


FIG. 13 – Arrondis d’arêtes en un sommet incident à six arêtes avec éclatement des sommets.

- [EL94] H. Elter and P. Lienhardt. Cellular complexes as structured semi-simplicial sets. In *International Journal of Shape Modeling*, volume 1, pages 191–217. 1994.
- [Elt94] H. Elter. *Étude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires*. PhD thesis, Université Louis-Pasteur de Strasbourg, 1994.
- [Far02] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD, a practical guide, fifth edition*. Morgan Kaufmann, 2002.
- [Fjä86] P. O. Fjällström. Smoothing of polyhedral models. In Alok Aggarwal, editor, *Proceedings of the 2nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 226–235, Yorktown Heights, NY, June 1986. ACM Press.
- [Led02] F. Ledoux. *Étude et spécifications formelles de l’arrondi d’objets géométriques*. PhD thesis, Université d’Évry Val d’Essonne, 2002.
- [Lie91] P. Lienhardt. Topological models for boundary representations : a comparison with n -dimensional generalized maps. *Computer-Aided Design*, 23(1) :59–82, 1991.
- [Pet91] J. Peters. Smooth interpolation of a mesh of curves. *Constructive Approximation*, 7 :221–247, 1991. Winner of SIAM Student Paper Competition 1989.
- [SN91] M. Szilvasy-Nagy. Flexible rounding operation for polyedra. *Computer-Aided Design*, 23(9) :629–633, 1991.
- [Vid01] F. Vidil. Développement d’un modeleur à base topologique. Technical report, stage de deuxième année, enseirb, 2001.
- [VMV94] T. Várady, R. R. Martin, and J. Vida. A survey of blending methods that use parametric surfaces. *Computer-aided Design*, 26(5) :341–365, 1994.
- [VR95] T. Várady and A. P. Rockwood. Vertex Blending Based on the Setback Split. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 527–542, 1995.
- [VR97] T. Várady and A. P. Rockwood. Geometric construction for setback vertex blending. *Computer-aided Design*, 29(6) :413–425, 1997.
- [YN95] X. Ye and H. Nowacki. Optimal tangent-plane and curvature continuous modification of curves at common nodepoint. In *Design Engineering Technical Conferences*, pages 49–56, 1995.