

Conversion de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques

L. GARNIER, S. FOUFOU, M. NEVEU

LE2I, FRE CNRS 2309
UFR Sciences, Université de Bourgogne, BP 47870,
21078 Dijon Cedex, France
<lgarnier, sfoufou, mneveu>@u-bourgogne.fr

Résumé : Dans cet article, nous allons convertir les cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques. Les Cyclides de Dupin ont été inventées en 1822 par le mathématicien français Charles Dupin. Ce sont des surfaces algébriques de degré inférieur à 4 dont les lignes de courbures sont des cercles ayant une équation paramétrique et deux équations implicites. Elles permettent d'effectuer des jointures en n'utilisant que des concepts géométriques sans se soucier de problèmes de paramétrisation. M. Pratt a développé un algorithme de conversion de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques à partir de concepts d'analyse. Celui-ci ne permet pas de convertir toute une cyclide. Nous allons améliorer cet algorithme afin de résoudre ce problème. Cependant, certaines valeurs des variables de la cyclide seront interdites ce qui peut gêner lors de jointure. Nous allons développer un nouvel algorithme de conversion basé sur des concepts géométriques (calculs barycentriques, symétrie de cercles) et les courbes de Bézier Rationnelles quadriques.

Mots clés : cyclide de Dupin, courbes et surfaces de Bézier Rationnelles de degré 2, cercles, calculs barycentriques.

1 Introduction

L'informatique a permis à l'industrie de réaliser des économies en utilisant des scènes 3D réalistes en remplacement de moules physiques. Il a fallu concevoir des modèles mathématiques permettant ces modélisations. Plusieurs modèles de courbes et de surfaces ont été développés : le modèle de P. Bézier [3, 13], le modèle B-Splines [12], les quadriques et superquadriques [31, 17]. Nous pouvons modéliser une scène à l'aide de primitives simples combinées à l'aide d'un arbre CSG [20, 28]. Il se pose alors des problèmes de jointures entre ces surfaces dus en particulier à la paramétrisation de celles-ci. Il est possible de remédier à ce problème de paramétrisation en introduisant une paramétrisation canonique [19].

Depuis une dizaine d'années, il est possible d'effectuer ces jointures \mathcal{G}^1 -continues de façon géométrique en utilisant les cyclides de Dupin, inventée en 1822 [10, 15, 7, 6]. Ce sont des surfaces non sphériques ayant des lignes de courbures circulaires, pouvant être représentées à la fois par des équations paramétriques ou implicites. Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur les problèmes de jointures de surfaces quadriques à l'aide de cyclides de Dupin [22, 5, 11, 32, 27, 26, 29, 1].

Dans la deuxième section, nous faisons un rappel sur les courbes et les surfaces de Bézier Rationnelles de degré deux, les cyclides et les cyclides de Dupin. Dans la troisième section, nous modélisons des cercles par des courbes de Bézier Rationnelles quadriques. Dans la quatrième section, nous montrons la conversion de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques réalisée par Pratt [24] et en faisons une amélioration. Les lignes de courbures des cyclides de Dupin étant des cercles, il est possible sous certaines conditions de les "traiter" comme des surfaces de révolution et nous développons un algorithme de conversion des cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques, section suivante. Dans la dernière section, nous comparons les différents algorithmes.

2 Etat de l'art

L'espace affine euclidien à trois dimensions est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le produit scalaire usuel entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Sauf mention contraire, les équations des cyclides seront données dans ce repère.

2.1 Courbes et surfaces d'approximation ou d'interpolation en synthèse d'images

Les surfaces utilisées en mathématiques sont définies sur des ouverts afin de ne pas se soucier des problèmes de différentiabilité aux bornes. Par contre, en synthèse d'images, nous souhaitons effectuer des jointures et donc nous sommes obligé d'utiliser des fermés. Les courbes sont généralement définies sur l'intervalle $[0; 1]$ et les surfaces sur le pavé $[0; 1] \times [0; 1]$.

2.1.1 Courbes de Bézier Rationnelles quadriques

Les courbes de Bézier Rationnelles quadriques sont des courbes paramétriques définies à partir des polynômes de Bernstein de degré 2, Formule (2.1). La propriété de la symétrie des polynômes de Bernstein, Formule (2.2), est essentielle pour la construction d'arc de cercle puisque elle assure la symétrie des constructions géométriques.

$$B_0(t) = (1-t)^2 \quad B_1(t) = 2t(1-t) \quad B_2(t) = t^2 \quad (2.1)$$

$$\forall i | 0 \leq i \leq 2, \forall t \in [0; 1], B_i(t) = B_{2-i}(1-t) \quad (2.2)$$

Une courbe de Bézier Rationnelle quadrique est définie par la Formule (2.3), [9], où la droite (P_0P_1) (resp. (P_2P_1)) est la tangente à la courbe au point P_0 (resp. P_2). Ce type de courbes permet de modéliser une conique à l'aide de trois points de contrôles $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et de trois nombres $(w_i)_{0 \leq i \leq 2}$ appelés poids.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{w_0B_0(t) + w_1B_1(t) + w_2B_2(t)} \left(w_0B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + w_1B_1(t)\overrightarrow{OP_1} + w_2B_2(t)\overrightarrow{OP_2} \right), t \in [0; 1] \quad (2.3)$$

Il est possible de simplifier cette définition pour modéliser une conique en prenant $w_0 = w_2 = 1$, cette courbe de Bézier Rationnelle quadrique est dite standard, Formule (2.4). Dans ce cas, on pose $w_1 = w$ et ce nombre détermine la nature de la conique : la courbe est un arc d'ellipse si et seulement si $0 < w < 1$; la courbe est un arc de parabole si et seulement si $w = 1$; la courbe est un arc d'hyperbole si et seulement si $w > 1$.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{B_0(t) + wB_1(t) + B_2(t)} \left(B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + wB_1(t)\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\overrightarrow{OP_2} \right), t \in [0; 1] \quad (2.4)$$

2.1.2 Surfaces de Bézier Rationnelles biquadriques

Les surfaces de Bézier Rationnelles biquadriques sont des surfaces définies comme produit tensoriel de courbes de Bézier Rationnelles quadriques, Formule (2.5), où $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ sont les points de contrôles, $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ les poids et $(u, v) \in [0; 1]^2$, [24].

$$\overrightarrow{OM}(u, v) = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{ij} B_i(u) B_j(v)} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{ij} B_i(u) B_j(v) \overrightarrow{OP_{ij}} \quad (2.5)$$

Une telle surface peut être vue comme l'ensemble des barycentres des points pondérées, Formule (2.6), [16, 18]. Le fait que la somme des coefficients fasse 1 assure l'indépendance de la définition par rapport au point O choisi. On peut simplifier cette définition pour obtenir une surface de Bézier Rationnelle biquadrique quasi-standard. Pour cela, on prend $w_{00} = w_{02} = w_{20} = w_{22} = 1$. Les courbes et les surfaces de Bézier Rationnelles sont invariantes par applications affines et projectives [9]. Les courbes tracées sur une surface de Bézier Rationnelle biquadrique obtenues avec une des variables u ou v constante sont des coniques.

$$\left(P_{ij}, \frac{w_{ij} B_i(u) B_j(v)}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 w_{ij} B_i(u) B_j(v)} \right)_{0 \leq i, j \leq 2} \quad (2.6)$$

2.2 Les cyclides

Dans son étude des surfaces anallagmatiques (on peut trouver une inversion de telle façon que cette surface soit invariante par cette transformation), M. Moutard a rencontré en 1804 les cyclides, [21]. Il a ainsi montré que les cyclides possèdent cette propriété par rapport à cinq pôles différents, ces pôles sont les centres des inversions. Les surfaces anallagmatiques de \mathcal{E} sont les surfaces enveloppes d'une sphère variable, orthogonale à une sphère fixe S , appelé *sphère directrice*, et dont le centre décrit une surface quelconque Γ appelée *déferente* [7, 8]. Les cyclides de Dupin forment une sous-famille de cyclides [7, 8].

2.3 Les cyclides de Dupin

Il est possible de définir ce type particulier de cyclides de différentes façons : une cyclide de Dupin est l'image d'un cône de révolution par une inversion ; une cyclide de Dupin est l'image d'un tore par une inversion ; les cyclides de Dupin sont les enveloppes de sphères centrées sur une conique, appelée *déferente*, et orthogonale à une sphère fixe, appelé *sphère d'inversion*, centrée sur l'axe focal de la cyclide, [7, 8] ; les cyclides de Dupin sont les enveloppes des sphères tangentes à deux cercles-droites d'un plan, les centres des sphères décrivant l'une des coniques déferentes ; les cyclides de Dupin sont les enveloppes de sphères de rayons R et centrées en un point M sur une conique de foyer F telles que la distance $FM + R$ soit constante (définition de Maxwell) ; les cyclides de Dupin sont les surfaces enveloppes des sphères tangentes à trois sphères fixes ; les cyclides de Dupin sont les projections stéréographiques du tore de Clifford inclus dans la sphère S^3 .

Une cyclide de Dupin de degré 4 est définie à l'aide de quatre paramètres a , b , c et μ avec $a \geq c$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Une cyclide de Dupin possède une équation paramétrique, Formule (2.7), et deux équations implicites équivalentes, Formule (2.8) et (2.9), [24, 14], résultat obtenu par [32] et aussi par [8] en explicitant l'enveloppe des sphères définissant une cyclide de Dupin. Selon les différentes valeurs des paramètres, il existe trois familles de cyclides de Dupin, ring cyclide ou cyclide en anneau, horned cyclide ou cyclide à croissant externe, spindle cyclide ou cyclide à croissant interne. Les propriétés des cyclides de Dupin ont été très étudiées [4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 23, 24, 25, 26, 2, 1, 30].

$$\Gamma(\theta, \psi) = \begin{cases} x(\theta, \psi) = \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ y(\theta, \psi) = \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ z(\theta, \psi) = \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{cases} \quad (2.7)$$

$\theta \in [0; 2\pi], \psi \in [0; 2\pi]$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 = 4(ax - c\mu)^2 + 4b^2y^2 \quad (2.8)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 = 4(cx - a\mu)^2 - 4b^2z^2 \quad (2.9)$$

3 Cercles et courbes de Bézier Rationnelles quadriques

Nous allons commencer ce paragraphe par un rappel sur la détermination du centre d'un cercle connaissant trois points distincts. Soit A , B et C trois points d'un cercle C de centre O . Alors O est le point d'intersection des médiatrices Δ_1 et Δ_2 des segments $[AB]$ et $[AC]$. Nous souhaitons modéliser un arc de cercle par une courbe de Bézier Rationnelle quadrique. Tout diamètre d'un cercle étant axe de symétrie de ce cercle, le point P_1 , Figure 1, doit donc appartenir au plan médiateur \mathcal{P} du segment $[P_0P_2]$. Le théorème 1 donne les caractéristiques du cercle passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) . Réciproquement, le théorème 2 donne la construction du point P_1 pour que la courbe de Bézier Rationnelle quadrique soit l'arc de cercle de centre donné et passant par P_0 et P_2 . Le théorème montre la modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier Rationnelle quadrique.

Théorème 1 : *Cercle déterminé par deux points et les tangentes en ces points*

Soit C le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les

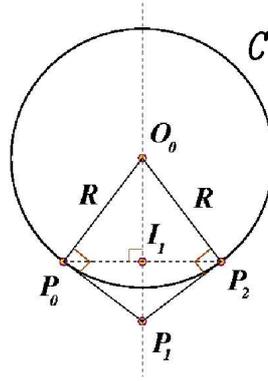


FIG. 1 – Modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier Rationnelle quadrique standard.

points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés.

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit \mathcal{P} le plan médiateur du segment $[P_0P_2]$. Alors

1. Le cercle C existe si et seulement si le point P_1 appartient au plan \mathcal{P} .
2. On suppose que le cercle C existe.
 - Le centre O_0 est donné par la Formule (3.1) et le rayon est $R = O_0P_0$.

$$\overrightarrow{P_1O_0} = t_0 \overrightarrow{P_1I_1}, \quad t_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}^2}{\overrightarrow{I_1P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_1}} \quad (3.1)$$

- Dans le plan déterminé par le cercle C , la mesure de l'angle géométrique $\widehat{P_0O_0P_2}$ est inférieure à π ce qui veut dire que si l'on prend une paramétrisation γ usuelle du cercle (en cosinus et sinus) tel que $P_0 = \gamma(\theta_0)$, $P_2 = \gamma(\theta_1)$, on a $|\theta_0 - \theta_1| < \pi$.

Théorème 2 : Construction du point de contrôle P_1 connaissant le centre du cercle

Soit C le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 . Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$.

Pour que la courbe de Bézier Rationnelle quadrique standard soit l'arc de cercle de C passant par les deux points distincts P_0 et P_2 , le point P_1 est défini par la Formule (3.2).

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \quad t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1}} \quad (3.2)$$

Il reste à déterminer le poids w de la courbe de Bézier Rationnelle quadrique standard pour que celle-ci corresponde à l'arc de cercle C désiré délimité par P_0 et P_2 , Figure 1.

Théorème 3 : Modélisation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier Rationnelle quadrique quasi-standard

Soit P_0 , P_1 et P_2 trois points non alignés de l'espace euclidien \mathcal{E} et I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$.

La courbe de Bézier Rationnelle quadrique quasi-standard γ de poids w est un arc de cercle C de centre O_0 et de rayon R définie par les points P_0 , P_1 et P_2 , théorème 1, si et seulement si w vérifie la Formule (3.3).

$$|1 + w| = |O_0I_1 + wO_0P_1| \quad (3.3)$$

Le morceau de l'arc de courbe déterminé par le poids w est donné par le tableau 1.

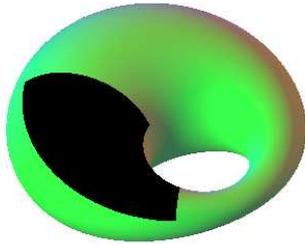
petit arc de cercle	grand arc de cercle
$w = \frac{O_0I_1 - R}{R - O_0P_1} = \frac{O_0I_1 - O_0P_0}{O_0P_0 - O_0P_1} > 0$	$w = -\frac{O_0I_1 + R}{R + O_0P_1} = -\frac{O_0I_1 + O_0P_0}{O_0P_0 + O_0P_1} < 0$

TAB. 1 – Arc de cercle en fonction du poids.

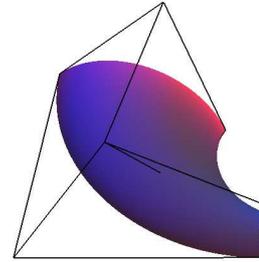
4 Conversion de cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels bi-quadrriques

Les courbes tracées sur une surface de Bézier Rationnelle biquadrrique obtenues avec une des variables u ou v constante sont des coniques. Les lignes de courbures des cyclides de Dupin sont des cercles et donc des coniques particulières. Il est donc possible de convertir des cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadrriques. L'algorithme de conversion proposé par M. Pratt dans [24] permet de déterminer facilement le carreau de Bézier Rationnel biquadrrique représentant une cyclide de Dupin. Les coordonnées des points de contrôles et les poids sont calculés à partir de l'équation paramétrique d'une cyclide de Dupin, Equation (2.7), en fonction des paramètres de la cyclide de Dupin et des bornes délimitant la partie à convertir. Dans cet algorithme, les formules de calcul des points de contrôles du carreau de Bézier Rationnel biquadrrique sont données en exploitant les relations trigonométriques liant les fonctions sinus et cosinus à la fonction tangente, Formule (4.1). La Figure 2 montre le résultat de la conversion d'un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrrique.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\pi\mathbb{Z}, \quad \cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \sin(\theta) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (4.1)$$



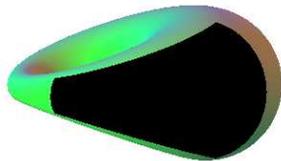
Morceau de cyclide de Dupin à convertir



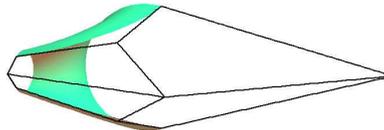
Carreau de Bézier, méthode de Pratt

FIG. 2 – Conversion d'un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrrique en utilisant la méthode de Pratt.

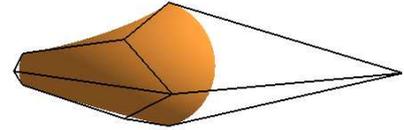
$(\theta_0, \theta_1, \psi_0, \psi_1) \in (\mathbb{R} - (\pi + 2\pi\mathbb{Z}))^4$ car la fonction \tan n'est pas définie sur l'ensemble $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, donc pour certaines valeurs de θ ou ψ , la conversion de la cyclide de Dupin n'est pas possible. Certaines lignes de courbure ne peuvent donc pas être choisies comme bord du carreau de Bézier Rationnel biquadrrique à convertir. La Figure 3 illustre un cas de disfonctionnement de cet algorithme : la discontinuité de la fonction \tan en $\frac{\pi}{2}$ modulo π fait en sorte que cet algorithme ne fonctionne pas correctement lorsque $\pi \in]\theta_0; \theta_1[$ ou lorsque $\pi \in]\psi_0; \psi_1[$. La figure de gauche montre la portion de la cyclide à convertir. La figure du centre montre que le carreau de Bézier Rationnel biquadrrique résultant ne correspond pas au morceau choisi. Nous améliorons l'algorithme précédent, pour obtenir la figure de droite, en changeant simplement le calcul des poids en prenant la valeur absolue de la formule originale.



Portion de la cyclide à convertir



conversion, algorithme de Pratt



Conversion, amélioration de l'algorithme de Pratt

FIG. 3 – Insuffisance de l'algorithme de Pratt pour convertir un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrrique.

Les valeurs trigonométriques $\theta_0, \theta_1, \psi_0$ et ψ_1 sont utilisées pour déterminer les points de contrôles et les poids. Si on a $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 4\frac{\pi}{3}$, les points de contrôles seront "entre" $-\frac{2\pi}{3}$ et 0. Nous devons donc avoir $|\theta_0 - \theta_1| < \pi$

et $|\psi_0 - \psi_1| < \pi$. En tenant compte de cette contrainte, nous obtenons plusieurs conversions possibles : la Figure 4 illustre une cyclide de Dupin convertie en 9 carreaux de Bézier Rationnels biquadriques en utilisant l'algorithme amélioré. La combinaison des deux algorithmes permet de réduire à 6 le nombre minimal de carreaux nécessaires pour assurer la conversion de toute la cyclide de Dupin, image de droite.

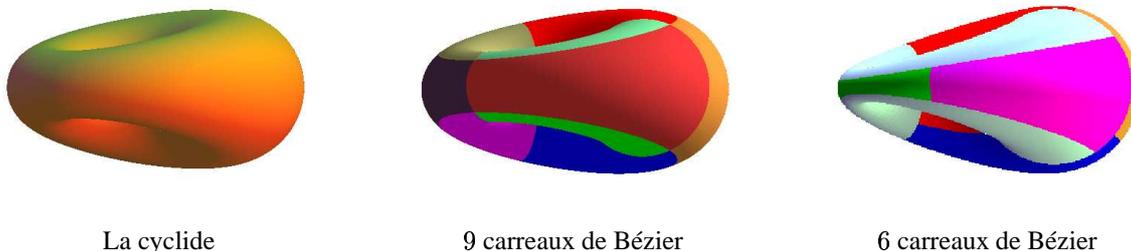


FIG. 4 – Conversion d'une cyclide de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadriques.

Cette amélioration permet de convertir toute une cyclide de Dupin en carreaux de Bézier Rationnelles biquadriques. Il ne permet pas d'avoir comme "bord" une courbe obtenue avec un des paramètres ayant une valeur de π . De plus, il ne fonctionne pas tout le temps, Figure 5. Le problème vient du poids w_{12} qui devrait être négatif. Ainsi, dans l'algorithme de Pratt amélioré, la courbe de Bézier Rationnelle quadrique modélise le grand arc du cercle supérieur délimitant la partie de la cyclide à convertir et la courbe de Bézier Rationnelle quadrique modélise le petit arc du cercle inférieur délimitant la partie de la cyclide à convertir. Nous allons développer un autre algorithme basé sur le calcul barycentrique et les propriétés circulaires des cyclides de Dupin.



FIG. 5 – Problème de l'algorithme de Pratt amélioré pour effectuer certaine conversion d'un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrique.

5 Nouvel algorithme de conversion

5.1 Propriétés barycentriques des surfaces de Bézier Rationnelles biquadriques

On considère la surface de Bézier Rationnelle biquadrique standard S_0 , de points de contrôles $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ et de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ avec $w_{00} = w_{02} = w_{20} = w_{22} = 1$. Pour que la surface S_0 modélise une surface à courbure sphérique, il faut que P_{01} appartienne au plan médiateur de $[P_{00}P_{02}]$, P_{10} appartienne au plan médiateur de $[P_{00}P_{20}]$, P_{21} appartienne au plan médiateur de $[P_{20}P_{22}]$ et P_{12} appartienne au plan médiateur de $[P_{02}P_{22}]$. Nous allons donner quelques propriétés barycentriques des surfaces de Bézier Rationnelles biquadriques quasi-standard.

Théorème 4 : *Propriétés barycentriques des surfaces de Bézier Rationnelles biquadriques quasi-standard*

Soit S une surface de Bézier Rationnelle biquadrique quasi-standard de points de contrôles $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ et de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ avec $w_{00} = w_{02} = w_{20} = w_{22} = 1$. Un point $M(u, v)$, $(u, v) \in [0; 1]^2$ appartient à la surface S si et seulement si $M(u, v)$ vérifie la Formule (2.5).

– Soit I_0 le milieu du segment $[P_{00}P_{02}]$, J_0 le milieu du segment $[P_{00}P_{20}]$, I_2 le milieu du segment $[P_{20}P_{22}]$ et J_2 le milieu du segment $[P_{02}P_{22}]$. On a alors les relations de la Formule (5.1).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} \left(0, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+w_{01}} \left(\overrightarrow{OI_0} + w_{01}\overrightarrow{OP_{01}}\right) & \overrightarrow{OM} \left(1, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1+w_{21}} \left(\overrightarrow{OI_2} + w_{21}\overrightarrow{OP_{21}}\right) \\
\overrightarrow{OM} \left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{1}{1+w_{10}} \left(\overrightarrow{OJ_0} + w_{10}\overrightarrow{OP_{10}}\right) & \overrightarrow{OM} \left(\frac{1}{2}, 1\right) &= \frac{1}{1+w_{12}} \left(\overrightarrow{OJ_2} + w_{12}\overrightarrow{OP_{12}}\right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

- Soient G_0 l'isobarycentre des points $P_{00}, P_{02}, P_{20}, P_{22}, G_2$ le barycentre des points pondérés $(P_{10}, w_{10}), (P_{01}, w_{01}), (P_{12}, w_{12}), (P_{21}, w_{21})$ et $w = w_{01} + w_{10} + w_{12} + w_{21}$. Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(G_0, 2), (G_2, w)$.
- Le point $M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vérifie les deux Formules (5.2) et (5.3). De la Formule (5.3), on déduit que le point P_{11} appartient à la droite $(M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) G_1)$.

$$\overrightarrow{OM} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2+w+2w_{11}} \left((2+w)\overrightarrow{OG_1} + 2w_{11}\overrightarrow{OP_{11}}\right) \tag{5.2}$$

$$w_{11}M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) P_{11} = \frac{2+w}{2} M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) G_1 \tag{5.3}$$

- Le point $M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ vérifie les deux Formules (5.4) et (5.5) où G_3 est le barycentre des points pondérés $(P_{00}, 9), (P_{20}, 9), (P_{02}, 1), (P_{22}, 1), (P_{01}, 6w_{01}), (P_{21}, 6w_{21}), (P_{10}, 18w_{10}), (P_{12}, 2w_{12})$, et $W_1 = 20 + 6w_{01} + 18w_{10} + 2w_{12} + 6w_{21}$. De la Formule (5.5), on déduit que le point P_{11} appartient à la droite $(G_3M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right))$

$$\overrightarrow{OM} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{W_1 + 12w_{11}} \left(W_1\overrightarrow{OG_3} + 12w_{11}\overrightarrow{OP_{11}}\right) \tag{5.4}$$

$$(W_1 + 12w_{11}) G_3 M \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 12w_{11} \overrightarrow{G_3 P_{11}} \tag{5.5}$$

- Le point $M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ vérifie les deux Formules (5.6) et (5.7) où G_4 est le barycentre des points pondérés $(P_{00}, 9), (P_{20}, 9), (P_{02}, 1), (P_{22}, 1), (P_{10}, 6w_{10}), (P_{12}, 6w_{12}), (P_{01}, 18w_{01}), (P_{21}, 2w_{21})$, et $W_2 = 20 + 6w_{10} + 18w_{01} + 2w_{21} + 6w_{12}$. De la Formule (5.7), on déduit que le point P_{11} appartient à la droite $(G_4M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right))$.

$$\overrightarrow{OM} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{W_2 + 12w_{11}} \left(W_2\overrightarrow{OG_4} + 12w_{11}\overrightarrow{OP_{11}}\right) \tag{5.6}$$

$$(W_2 + 12w_{11}) G_4 M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 12w_{11} \overrightarrow{G_4 P_{11}} \tag{5.7}$$

5.2 Algorithme de conversion proposé

L'idée est de développer une méthode gardant les symétries circulaires le long des courbes coordonnées de la cyclide de Dupin en utilisant l'algorithme 1. Une cyclide n'est pas une surface de révolution, nous devons donc nous assurer en plus que les droites $(G_1\Gamma(\theta_2, \varphi_2)), (G_3\Gamma(\theta_2, \varphi_3))$ et $(G_4\Gamma(\theta_3, \varphi_2))$ ont bien le même point d'intersection. Ceci est vrai à condition que θ_0 et θ_1 (ou ψ_0 et ψ_1) soient symétriques par rapport à 0 ou π sur le cercle trigonométrique. L'algorithme 1 permet de convertir la cyclide de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadratiques quasi-standards, en utilisant les formules des théorèmes 3 et 4.

5.3 Résultats

La Figure 6 illustre deux conversions d'une partie d'une cyclide de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadratique quasi-standard. Dans le second exemple, nous avons $\theta_1 = \pi$. Pour l'image du dessus à droite, nous avons utilisé un carreau de Bézier Rationnel biquadratique standard avec les poids positifs. Concernant l'image du dessous à droite, nous avons utilisé un carreau de Bézier Rationnel biquadratique quasi-standard, les poids sont positifs le long des lignes de courbures obtenues avec θ constant, négatifs le long des lignes de courbures obtenues avec ψ constant.

Algorithm 1 Modélisation d'un carreau de cyclide de Dupin par un carreau de Bézier Rationnel biquadratique quasi-standard

1. Nous choisissons un repère orthonormé de l'espace euclidien \mathcal{E} de tel façon que l'équation de la cyclide de Dupin S soit définie par la nappe paramétrée Γ de la Formule (2.7), les lignes de courbure soient choisies pour $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \psi = \psi_0$ et $\psi = \psi_1$ telles que θ_0 et θ_1 (ou ψ_0 et ψ_1) soient symétriques par rapport à 0 ou π sur le cercle trigonométrique.
 2. les sommets des carreaux sont $P_{00} = \Gamma(\theta_0, \varphi_0), P_{02} = \Gamma(\theta_1, \varphi_0), P_{20} = \Gamma(\theta_0, \varphi_1), P_{22} = \Gamma(\theta_1, \varphi_1)$.
 3. Déterminer le centre des quatre cercles de courbure en utilisant trois points sur chaque ligne de courbure (dont les deux sommets).
 4. Déterminer les points de contrôle P_{10}, P_{01}, P_{21} et P_{12} dans les plans médiateurs correspondants et dans les plans des lignes de courbures correspondants à l'aide des tangentes aux cercles correspondants en utilisant le théorème 2.
 5. Calculer les poids w_{10}, w_{01}, w_{21} et w_{12} en utilisant le tableau 1 du théorème 3.
 6. Déterminer la première courbe coordonnée γ_u qui est une courbe de Bézier Rationnelle quadrique standard de points de contrôles P_{00}, P_{10}, P_{20} et de poids w_{10} .
Déterminer la seconde courbe coordonnée γ_v qui est une courbe de Bézier Rationnelle quadrique standard de points de contrôles P_{00}, P_{01}, P_{02} et de poids w_{01} .
 7. Trouver θ_2 solution de l'équation $\gamma_u(\frac{1}{2}) = \Gamma(\theta_2, \varphi_0)$. Trouver φ_2 solution de l'équation $\gamma_v(\frac{1}{2}) = \Gamma(\theta_0, \varphi_2)$. Trouver φ_3 solution de l'équation $\gamma_v(\frac{1}{4}) = \Gamma(\theta_0, \varphi_3)$.
 8. Soit G_0 l'isobarycentre des points $P_{00}, P_{02}, P_{20}, P_{22}$. Soit G_2 le barycentre des points pondérés $(P_{10}, w_{10}), (P_{01}, w_{01}), (P_{12}, w_{12}), (P_{21}, w_{21})$. Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(G_0, 2), (G_2, w)$.
Soit G_3 le barycentre des points pondérés $(P_{00}, 9), (P_{20}, 9), (P_{02}, 1), (P_{22}, 1), (P_{01}, 6w_{01}), (P_{21}, 6w_{21}), (P_{10}, 18w_{10}), (P_{12}, 2w_{12})$. Soit $M = \Gamma(\theta_2, \varphi_2)$.
Déterminer P_{11} intersection des droites $(G_1\Gamma(\theta_2, \varphi_2))$ et $(G_3\Gamma(\theta_2, \varphi_3))$.
 9. Déterminer le poids w_{11} défini par la Formule (5.3).
-

6 Comparaison des algorithmes de conversions

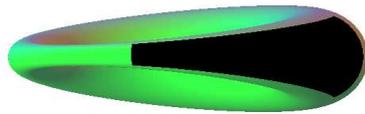
Pour convertir une cyclide de Dupin en utilisant notre algorithme, nous n'avons besoin que de quatre carreaux de Bézier Rationnels biquadratiques alors qu'il en faut neuf en utilisant l'algorithme amélioré de Pratt et six en combinant l'algorithme de Pratt et sa version améliorée, Figure 7. Notre algorithme permet de plus de convertir une cyclide de Dupin le long d'une ligne de courbure obtenue avec un des paramètres valant π , ce qui n'est réalisable ni avec l'algorithme de Pratt, ni avec sa version améliorée. Cette valeur π est indispensable lors de jointure cylindre-plan modélisant un récipient.

7 Conclusion

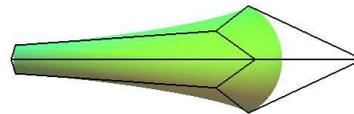
Dans cet article, nous avons développé un algorithme permettant de convertir des cyclides de Dupin en carreaux de Bézier Rationnels biquadratiques quasi-standards. Notre point de départ a été le travail de M. Pratt. Comme celui-ci ne permettait pas de convertir toute une cyclide de Dupin, nous l'avons amélioré afin de résoudre ce problème. Il existait encore des valeurs interdites pour la conversion. Nous avons développé un nouvel algorithme basé sur les propriétés barycentriques des carreaux de Bézier Rationnels biquadratiques quasi-standards et les propriétés circulaires des cyclides de Dupin. La combinaison de l'algorithme de Pratt est de sa version améliorée nécessite six carreaux pour représenter une cyclide de Dupin tandis que notre nouvel algorithme n'en demande que quatre. De plus, notre algorithme permet de convertir des morceaux de cyclides de Dupin impossible jusqu'à ce jour.

Références

- [1] M. Berger. *Géométrie 2*, volume 5. Cedic-Nathan, 2ème edition, 1977-1978.



Cyclide de Dupin



Carreau de Bézier

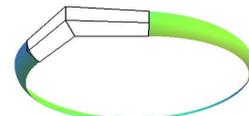
Poids positifs le long des lignes de courbures avec ψ constant, colonne de gauche, tableau 1.



Cyclide de Dupin, vue 1



Cyclide de Dupin, vue 2

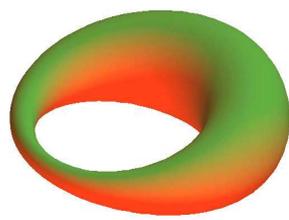


Carreau de Bézier

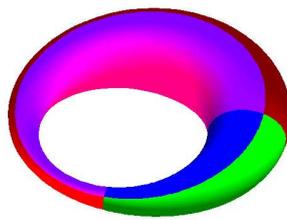
Poids négatifs le long des lignes de courbures avec ψ constant, colonne de droite, tableau 1, et $\theta_1 = \pi$.

FIG. 6 – Conversion d’un morceau de cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrique quasi-standard en utilisant l’algorithme 1.

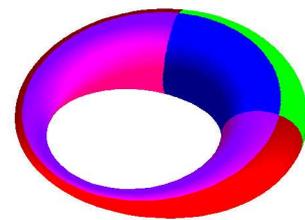
- [2] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF, 2ème edition, avril 1992.
- [3] P. Bézier. *Courbe et surface*, volume 4. Hermès, Paris, 2 edition, Octobre 1986.
- [4] V. Chandru, D. Dutta, and C. M. Hoffmann. On the geometry of dupin cyclides. *CSD-TR-818*, November 1988.
- [5] V. Chandru, D. Dutta, and C. M. Hoffmann. Variable radius blending using dupin cyclides. Technical Report CSD-TR-851, Purdue University, January 1989.
- [6] G. Darboux. *Thèse à la faculté des sciences de Paris*. Annales scientifiques de l’école normale, 1866.
- [7] G. Darboux. *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [8] G. Darboux. *Principe de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [9] G. Demengel and J.P. Pouget. *Mathématiques des Courbes et des Surfaces. Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS*, volume 1. Ellipse, 1998.
- [10] Ch. P. Dupin. *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc*. Bachelier, Paris, 1822.
- [11] D. Dutta, R. R. Martin, and M. J. Pratt. Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1) :53–59, January 1993.
- [12] G. Farin. *Curves And Surfaces*. Academic Press, 3ème edition, 1993.
- [13] J. Foley, A. Van Dam, D. Freiner, and J. Hughes. *Computer Graphics : Principles and Practice*. Addison Wesley, 2 edition, 1990.
- [14] L. Garnier, M. Neveu, and S. Foufou. Jointure d’un cône et d’une sphère par une cyclide de dupin. *AFIG 2001*, pages 133–142, november 2001.
- [15] G. Darboux. *Principe de Géométrie Analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [16] M. Gourion. *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.
- [17] C. Hoffman. *Geometric and solid modeling : An introduction*, 1989.
- [18] J.M. Arnaudies J. Lelong-Ferrand. *Cours de Mathématiques : Géométrie et cinématique*, volume 3. Dunod, 2ème edition, Octobre 1991.
- [19] F. Jaar, L. Garnier, and M. Neveu. The profiler : a tool for variational surface deformation. *Swiss Conference of CAD/CAM’99*, pages 179–184, février 1999.
- [20] M. Mantyla. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, Rockville, Md, 1998.



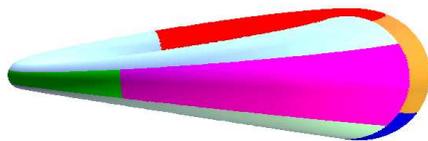
La cyclide



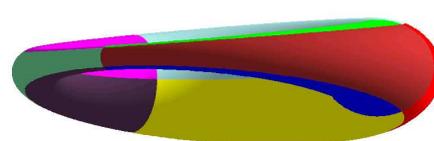
Une première conversion avec notre algorithme, 4 carreaux



Une seconde conversion avec notre algorithme, 4 carreaux



Algorithme de Pratt et algorithme de Pratt amélioré, 6 carreaux



Algorithme de Pratt amélioré, 9 carreaux

FIG. 7 – Comparaison des algorithmes pour effectuer la conversion d'une cyclide de Dupin en un carreau de Bézier Rationnel biquadrrique.

- [21] Moutard. *Annales de Mathématiques*. Bulletin de la société Philomatique et compte rendu de l'Accadémie, 1804.
- [22] M Paluszny and W Boehm. General cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 15 :699–710, 1998.
- [23] U. Pinkall. *Dupin hypersurfaces*. preprint, Bonn, 1985.
- [24] M. J. Pratt. Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, (7) :221–242, 1990.
- [25] M. J. Pratt. Dupin cyclides and supercyclides. *Mathematics of Surfaces VI (Proc. of the VI. IMA Conference on the Mathematics of Surfaces, Brunel University, 1994*.
- [26] M. J. Pratt. Cyclides in computer aided geometric design II. *Computer Aided Geometric Design*, 12(2) :131–152, 1995.
- [27] M. J. Pratt. Quartic supercyclides I : Basic theory. *Computer Aided Geometric Design*, 14(7) :671–692, 1997.
- [28] A. Requicha and J. Rossignac. *Solid modelling and beyond*, 1992.
- [29] Ching-Kuang Shene. Blending two cones with dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 15(7) :643–673, 1998.
- [30] Ching-Kuang Shene. Do blending and offsetting commute for dupin cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 17(9) :891–910, 2000.
- [31] D. Terzopoulos. Dynamic 3d models with local and global geometric deformations : Deformable superquadrics. *IEEE Trans on PAMI*, 13(7) :703–714, 1991.
- [32] Fordyth A. R. Z. *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.