

Techniques mathématiques pour l'informatique
TD – Séance n° 1

Exercice 1 – Complexité

Soit A et B , deux algorithmes pour résoudre un même problème. La complexité de A est en $\theta(n^2)$ et son exécution avec $n = 100$ dure 1s. La complexité de B est en $\theta(n \log n)$ et son exécution avec $n = 100$ dure 10s.

1. L'application prévoit une valeur de n égale à 1000. Quel algorithme faut-il à priori choisir ?
2. Même question si n égale à 10000.

Exercice 2 – Complexité

Soit un algorithme en $\theta(n^2)$. Un ordinateur X permet de traiter en 1 mn des problèmes de taille n_0 . Quelle est la taille des problèmes que l'on pourra traiter en 1 mn avec un ordinateur 100 fois plus rapide ? Même chose pour $\theta(2^n)$.

Exercice 3 – Complexité

Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ? Prouvez vos réponses.

1. $1000 \in O(1)$;
2. $n^2 \in O(n^3)$;
3. $n^3 \in O(n^2)$;
4. $2^{n+1} \in O(2^n)$;
5. $(n+1)^2 \in O(n^2)$;
6. $n^3 + 3n^2 + n + 1996 \in O(n^3)$;
7. $n^2 * n^3 \in O(n^3)$;
8. $2^{2n} \in O(2^n)$;
9. $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \theta(n^2)$;
10. $\log n \in \theta(\log n^2)$

Exercice 4 – Complexité

Comparer deux à deux les fonctions suivantes :

1. $f_1(n) = n^2 + 100$
2. Soit f_2 défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_2(n) &= n \text{ si } n \text{ est impair} \\ &= n^3 \text{ si } n \text{ est pair} \end{aligned}$$

3. Soit f_3 défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_3(n) &= n \text{ si } n < 100 \\ &= n^3 \text{ si } n \geq 100 \end{aligned}$$

Exercice 5 – Complexité

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions telles que $f_1 = \theta(g)$ et $f_2 = \theta(g)$ et $f_1 \geq f_2$. A-t'on $f_1 - f_2 = \theta(g)$?

Exercice 6 – Complexité

1. Démontrer que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.
2. Quelle est la complexité de la boucle suivante :

```
for i:=1 to (n-1) do
  for j:=(i+1) to n do
    for k:=1 to j do
      {instruction}
```

Exercice 7 – Complexité

Montrer que $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$.