Techniques mathématiques pour l'informatique
TD1

R. Watrigant

1 Preuves par récurrence

Exercice 1. Trouver l'erreur dans la preuve par récurrence de la propriété suivante : **"n points quelconques du plan sont toujours alignés"** La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons que cette propriété est vraie au rang n et considérons $n + 1$ points $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, ..., A_n$ sont alignés sur une droite D. Pour les mêmes raisons, les n points $A_2, ..., A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D'. Comme les points A_2 et A_n sont communs aux droites D et D', alors ces deux droites sont confondues. Ainsi les $n + 1$ points sont alignés.

Exercice 2. Montrer que tout entier $n \geq 8$ peut s'écrire comme une somme ne contenant que les nombres 3 et 5. Par exemple $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$ et $10 = 5 + 5$.

Exercice 3. Montrer qu'un damier de 2^n cases de côté privé d'une case peut toujours être pavé de triminos en forme de L. Un trimino recouvre trois cases du damier.

Exercice 4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} < 2\sqrt{2}$$

2 Ensembles et fonctions

Exercice 5. On considère la fonction f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ sinon. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(p, q) = 2^p(2q + 1) - 1$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note χ_A l'application définie de E dans $\{0, 1\}$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ sinon.
(i) Pour deux parties A et B de E, vérifier les propriétés suivantes :

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

(ii) Si A est une partie de B, montrer que

$$\chi_{B \setminus A} = \chi_B - \chi_A$$

Exercice 8. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$. (i) Représenter graphiquement C dans le plan. (ii) Peut-on trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $C = A \times B$?

3 Le principe de Dirichlet

Exercice 9. Combien d'habitants doit avoir un village pour qu'on puisse être sûr que deux personnes aient les mêmes initiales ?

Exercice 10. Dans un quadrillage de n cases sur n, certaines cases sont noires et les autres blanches. Montrer que, parmi toutes les bandes (lignes et colonnes), il en existe au moins deux qui possèdent le même nombre de cases noires.

Exercice 11. Montrer que dans une réception réunissant n personnes, il existe au moins deux d'entre elles qui connaissent exactement le même nombre de personnes parmi les présents (aide : si une personne ne connait aucune personne, il ne peut pas exister quelqu'un qui connaisse tout le monde).