Comparaison de schémas implicites et explicites, centrés et décentrés en maillage mobile pour la simulation d'écoulements compressés

Marc Buffat[1] Anne Cadiou [2]
Lionel Le Penven [2] Catherine Le Ribault[2]

[1]UCB Lyon I, LMFA UMR 5509

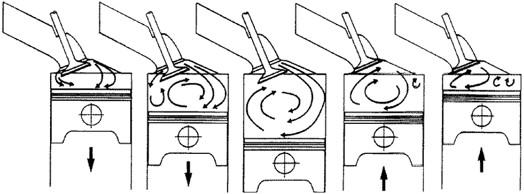
[2]CNRS, LMFA UMR 5509

CFT'04 Monastir (Tunisie) Avril 2004

Plan de l'exposé

Introduction

- Ecoulements de tumble compressés (chambre de combustion)



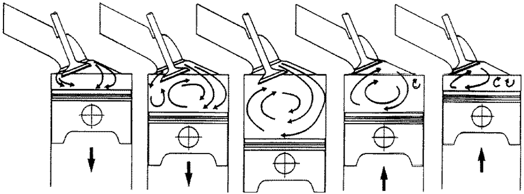
Difficultés des simulations numériques

- Ecoulement compressible à bas Mach
- Maillages mobiles
- Condition de stabilité basée sur c (célérité) et non u (vitesse)

$$CFL = \frac{(u+c)\,\Delta t}{\Delta x} \approx \frac{c\,\Delta t}{\Delta x}$$

Introduction

- Ecoulements de tumble compressés (chambre de combustion)



Difficultés des simulations numériques

- Ecoulement compressible à bas Mach
- Maillages mobiles
- Condition de stabilité basée sur c (célérité) et non u (vitesse)

$$CFL = \frac{(u+c)\,\Delta t}{\Delta x} \approx \frac{c\,\Delta t}{\Delta x}$$

Schémas Numériques

Equations de conservation pour $W = \left[\rho, \rho\overrightarrow{U}, E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho U^2\right]$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{div\,(\mathcal{A}(W)W)}_{\text{flux d'Euler}} = \underbrace{div\,(\mathcal{R}(W))}_{\text{flux visqueux}} + \underbrace{\mathcal{S}(W)}_{\text{source}}$$

Difficultés numériques: flux d'Euler $\mathcal{F}(W) = \mathcal{A}(W)W$

schéma explicite avec cdt de stabilité $CFL < 1$

- Schéma explicite centré d'ordre 2 instable
- Schéma explicite décentré (suivant les valeurs propres a de $\mathcal{A}$)
- Schéma explicite d'ordre élevé (i.e. >2)

schéma implicite $CFL >> 1$

- Schéma implicite centré non linéaire

Schémas Numériques

Equations de conservation pour $W = \left[\rho, \rho\overrightarrow{U}, E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho U^2\right]$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{div\,(\mathcal{A}(W)W)}_{\text{flux d'Euler}} = \underbrace{div\,(\mathcal{R}(W))}_{\text{flux visqueux}} + \underbrace{\mathcal{S}(W)}_{\text{source}}$$

Difficultés numériques: flux d'Euler $\mathcal{F}(W) = \mathcal{A}(W)W$

schéma explicite avec cdt de stabilité $CFL < 1$

- Schéma explicite centré d'ordre 2 instable
- Schéma explicite décentré (suivant les valeurs propres a de $\mathcal{A}$)
- Schéma explicite d'ordre élevé (i.e. >2)

schéma implicite $CFL >> 1$

- Schéma implicite centré non linéaire

Schémas Numériques

Equations de conservation pour $W = \left[\rho, \rho\overrightarrow{U}, E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho U^2\right]$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{div\,(\mathcal{A}(W)W)}_{\text{flux d'Euler}} = \underbrace{div\,(\mathcal{R}(W))}_{\text{flux visqueux}} + \underbrace{\mathcal{S}(W)}_{\text{source}}$$

Difficultés numériques: flux d'Euler $\mathcal{F}(W) = \mathcal{A}(W)W$

schéma explicite avec cdt de stabilité $CFL < 1$

- Schéma explicite centré d'ordre 2 instable
- Schéma explicite décentré (suivant les valeurs propres a de $\mathcal{A}$)
- Schéma explicite d'ordre élevé (i.e. >2)

schéma implicite $CFL >> 1$

- Schéma implicite centré non linéaire

Schémas Numériques

Equations de conservation pour $W = \left[\rho, \rho\overrightarrow{U}, E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho U^2\right]$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{div\,(\mathcal{A}(W)W)}_{\text{flux d'Euler}} = \underbrace{div\,(\mathcal{R}(W))}_{\text{flux visqueux}} + \underbrace{\mathcal{S}(W)}_{\text{source}}$$

Difficultés numériques: flux d'Euler $\mathcal{F}(W) = \mathcal{A}(W)W$

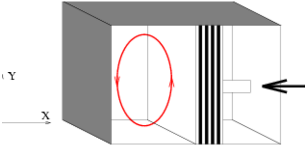
schéma explicite avec cdt de stabilité $CFL < 1$

- Schéma explicite centré d'ordre 2 instable
- Schéma explicite décentré (suivant les valeurs propres a de $\mathcal{A}$)
- Schéma explicite d'ordre élevé (i.e. >2)

schéma implicite $CFL >> 1$

- Schéma implicite centré non linéaire

Maillage déformable



$V_p = L(t)$

$r = \frac{L(0)}{L(t)} = 5$

changement de variable

$\chi = \frac{x}{L(t)}$

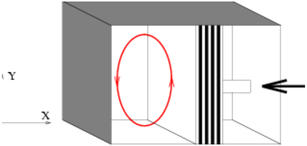
transformation domaine (EF)

$\int_{e_k} f.\psi_i d\omega = \int_{\hat{e}} \hat{f}.N_i det(J) d\hat{\omega}$

formulation conservative (VF)

$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho f \, d\omega =$
$- \int_{\Gamma_k} \rho f \, \overrightarrow{U}.\overrightarrow{n} \, d\Gamma + \int_{V_k} S d\omega$

Maillage déformable



$V_p = L(t)$

$r = \frac{L(0)}{L(t)} = 5$

changement de variable

$\chi = \frac{x}{L(t)}$

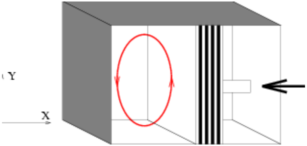
transformation domaine (EF)

$\int_{e_k} f.\psi_i d\omega = \int_{\hat{e}} \hat{f}.N_i det(J) d\hat{\omega}$

formulation conservative (VF)

$\frac{d}{dt}\int_{V_k} \rho f\, d\omega =$
$-\int_{\Gamma_k} \rho f\, \overrightarrow{U}.\overrightarrow{n}\, d\Gamma + \int_{V_k} S d\omega$

Maillage déformable



$V_p = L(t)$

$r = \frac{L(0)}{L(t)} = 5$

changement de variable

$\chi = \frac{x}{L(t)}$

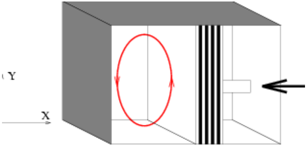
transformation domaine (EF)

$\int_{e_k} f.\psi_i d\omega = \int_{\hat{e}} \widehat{f}.N_i det(J) d\widehat{\omega}$

formulation conservative (VF)

$\frac{d}{dt}\int_{V_k} \rho f\, d\omega =$
$-\int_{\Gamma_k} \rho f\, \overrightarrow{U}.\overrightarrow{n}\, d\Gamma + \int_{V_k} S d\omega$

Maillage déformable



$V_p = L(t)$

$r = \frac{L(0)}{L(t)} = 5$

changement de variable

$\chi = \frac{x}{L(t)}$

transformation domaine (EF)

$\int_{e_k} f.\psi_i d\omega = \int_{\hat{e}} \widehat{f}.N_i det(J) d\widehat{\omega}$

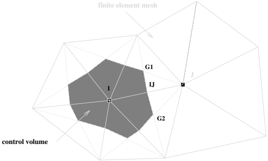
formulation conservative (VF)

$$\frac{d}{dt}\int_{V_k} \rho f\, d\omega =$$
$$-\int_{\Gamma_k} \rho f\, \overrightarrow{U}.\overrightarrow{n}\, d\Gamma + \int_{V_k} \mathcal{S} d\omega$$

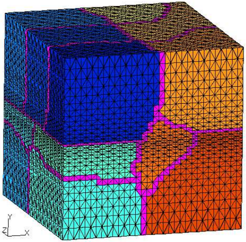
Code “NadiaLES”

- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



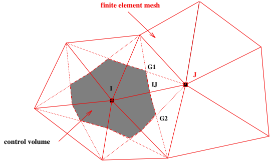
- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion
- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code “NadiaLES”

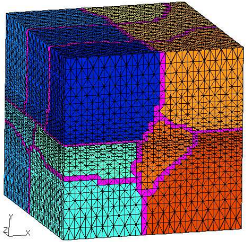
- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion

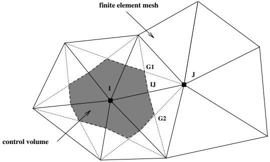
- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code "NadiaLES"

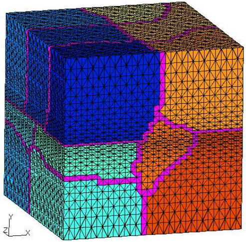
- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion

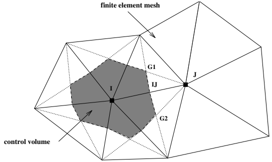
- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code "NadiaLES"

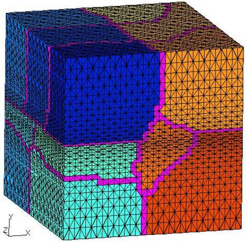
- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion

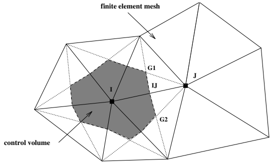
- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code “NadiaLES”

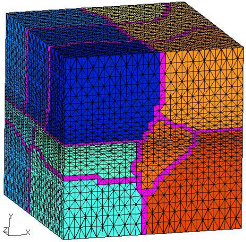
- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion

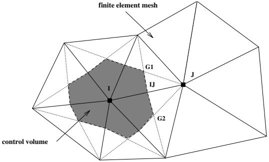
- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code “NadiaLES”

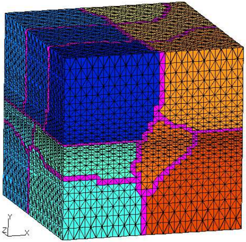
- Code E.F. + LES sur maillage non structuré (Duchamp 1999)

- FV/FE sur maillage non structuré (Dervieux 1998)



- Solveur de Rieman bas Mach RoeTurkel (Viozat 1997)
- Contrôle de la dissipation et de la dispersion

- precision $O(dt^4, h^2)$ avec Runge Kutta 4
- décomposition de domaine (calcul //e)



Code “NadiaDF”

- Code D.F. d’ordre élevé explicite (R.K. 4) sur maillage structuré

PADE: Lele 1992

reconstruction des dérivées ordre 4

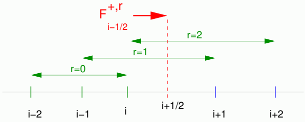
$$\alpha F'_{i-1} + F'_i + \alpha F'_{i+1} = a\frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

avec $\alpha = \frac{1}{4}$, $a = \frac{4}{3}$
système tri-diagonal (Thomas)

WENO: Jiang & Shu 1996

reconstruction des fluxs ordre 5

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{2} \omega_r F^{+,r}_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{r=0}^{2} \omega_{2-r} F^{-,r}_{i+\frac{1}{2}}$$



Code “NadiaDF”

- Code D.F. d’ordre élevé explicite (R.K. 4) sur maillage structuré

PADE: Lele 1992

reconstruction des dérivées ordre 4

$$\alpha F'_{i-1} + F'_i + \alpha F'_{i+1} = a \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

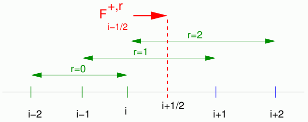
avec $\alpha = \frac{1}{4}$, $a = \frac{4}{3}$

système tri-diagonal (Thomas)

WENO: Jiang & Shu 1996

reconstruction des fluxs ordre 5

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{2} \omega_r F^{+,r}_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{r=0}^{2} \omega_{2-r} F^{-,r}_{i+\frac{1}{2}}$$



Code “NadiaDF”

- Code D.F. d’ordre élevé explicite (R.K. 4) sur maillage structuré

PADE: Lele 1992

reconstruction des dérivées ordre 4

$$\alpha F'_{i-1} + F'_i + \alpha F'_{i+1} = a\frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

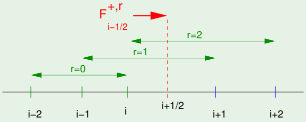
avec $\alpha = \frac{1}{4}$, $a = \frac{4}{3}$

système tri-diagonal (Thomas)

WENO: Jiang & Shu 1996

reconstruction des fluxs ordre 5

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{2} \omega_r F^{+,r}_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{r=0}^{2} \omega_{2-r} F^{-,r}_{i+\frac{1}{2}}$$



NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) = G(W_k^{n+1})$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k} \int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) = G(W_k^{n+1})$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k}\int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^{n} + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) = G(W_k^{n+1})$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k}\int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) = G(W_k^{n+1})$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k} \int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) = G(W_k^{n+1})$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k}\int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

NadiaVF

- Code VF parallèle en C++ sur maillage non structuré

- Schéma V.F. implicite BDF

$$\frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} = F(W^{n+1})$$

- Newton $G(W^{n+1}) = 0$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial W}\right)_k (W^{n+1}_{k+1} - W^{n+1}_k) = G(W^{n+1}_k)$$

- Schéma centré d'ordre 2

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial x_i}} = \frac{1}{V_k}\int_{\Gamma_k} W\, n_i\, d\Gamma$$

- LibMesh (Kirk 2002) gestion maillage en //e en C++ avec adapation (AMR)
- PETSC (Barry 2001) résolution système linéaire en //e (MPI) Krilov, MultiGrille
- METIS (Karypis 1996) partitionnement

Préconditionnement bas Mach

dépendance des variables d'état en fonction du Mach

$\rho = \theta(1)$ et $u = \theta(1)$ mais $E = \theta(Ma^{-2})$ et $p = \theta(Ma^{-2})$

NadiaLES

Roe-Turkel (Viozat 1999)

- préconditionnement de Δp en (β^2)
- variables entropiques $[p, \overrightarrow{u}, S]$:

$\beta \approx Ma$

NadiaVF

- décomposition de E_t et p

$$E_t(x,t) = \frac{1}{\gamma - 1} P_0(t) + E'(x,t)$$
$$p(x,t) = P_0(t) + p'(x,t)$$

- équation pour E'

$$E'(x,t) = \theta(1) \text{ et } p'(x,t) = \theta(1)$$
$$P_0(t) = \left(\frac{V(0)}{V(t)}\right)^{\gamma} \int_{V(0)} p(x,t)\,dx$$

Préconditionnement bas Mach

dépendance des variables d'état en fonction du Mach

$\rho = \theta(1)$ et $u = \theta(1)$ mais $E = \theta(Ma^{-2})$ et $p = \theta(Ma^{-2})$

NadiaLES

Roe-Turkel (Viozat 1999)

- préconditionnement de Δp en (β^2)
- variables entropiques $[p, \overrightarrow{u}, S]$:

$\beta \approx Ma$

NadiaVF

- décomposition de E_t et p

$$E_t(x,t) = \frac{1}{\gamma-1} P_0(t) + E'(x,t)$$
$$p(x,t) = P_0(t) + p'(x,t)$$

- équation pour E'

$$E'(x,t) = \theta(1) \text{ et } p'(x,t) = \theta(1)$$
$$P_0(t) = \left(\frac{V(0)}{V(t)}\right)^{\gamma} \int_{V(0)} p(x,t)\,dx$$

Préconditionnement bas Mach

dépendance des variables d'état en fonction du Mach

$\rho = \theta(1)$ et $u = \theta(1)$ mais $E = \theta(Ma^{-2})$ et $p = \theta(Ma^{-2})$

NadiaLES

Roe-Turkel (Viozat 1999)

- préconditionnement de Δp en (β^2)
- variables entropiques $[p, \overrightarrow{u}, S]$:

$\beta \approx Ma$

NadiaVF

- décomposition de E_t et p

$$E_t(x,t) = \frac{1}{\gamma-1}P_0(t) + E'(x,t)$$
$$p(x,t) = P_0(t) + p'(x,t)$$

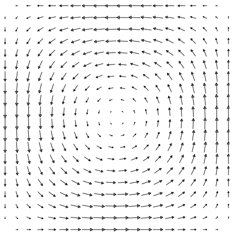
- équation pour E'

$$E'(x,t) = \theta(1) \text{ et } p'(x,t) = \theta(1)$$
$$P_0(t) = \left(\frac{V(0)}{V(t)}\right)^{\gamma} \int_{V(0)} p(x,t)\,dx$$

Décroissance d'un tourbillon

solution analytique

- tourbillon de Taylor $Re = \frac{U_{max} L}{\nu} = 1000$
- solution $Ma = 0$ (non entropique)
- $L = 1$, $U_{max} = 1$, $\rho_0 = 1$, $p_0 = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}$



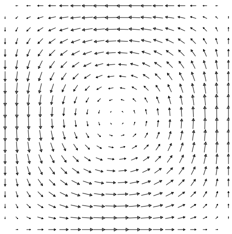
Questions sur les schémas numériques ?

Fluctuation de densité ?

- spatiale:$\Delta\rho = \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\Delta p = Ma^2 \Delta p$ (si isentropique)
- temporelle: ondes acoustiques de célérité $\approx c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = Ma^{-1}$

Convergence vers la solution $Ma = 0$?

Décroissance d'un tourbillon



solution analytique

- tourbillon de Taylor $Re = \frac{U_{max} L}{\nu} = 1000$
- solution $Ma = 0$ (non entropique)
- $L = 1$, $U_{max} = 1$, $\rho_0 = 1$, $p_0 = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}$

Questions sur les schémas numériques ?

Fluctuation de densité ?

- spatiale:$\Delta\rho = \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\Delta p = Ma^2 \Delta p$ (si isentropique)
- temporelle: ondes acoustiques de célérité $\approx c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = Ma^{-1}$

Convergence vers la solution $Ma = 0$?

Fluctuation de densité

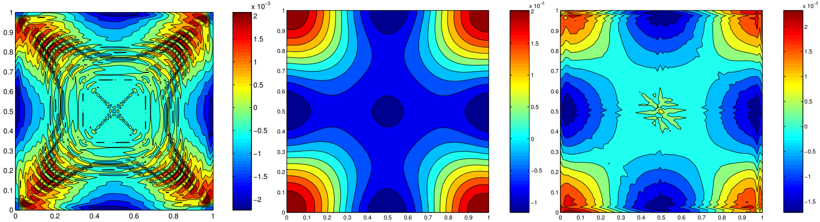


FIG.: fluctuations $\rho - 1$ à $Ma = 0.1$ (NadiaVF, NadiaDF, NadiaLES)

- *allure identique à* $Ma = 0.01$ *avec une amplitude plus faible*

	NadiaVF	NadiaDF WENO	NadiaDF Padé	NadiaLES
$Ma = 0.1$	$0.37\,10^{-2}$	$0.34\,10^{-2}$	$0.34\,10^{-2}$	$0.44\,10^{-2}$
$Ma = 0.01$	$0.84\,10^{-4}$	$0.34\,10^{-4}$	$0.34\,10^{-4}$	$0.38\,10^{-3}$

TAB.: maximum des fluctuations de densité: $\rho_{max} - \rho_{min}$ en 80^2

Fluctuation de densité

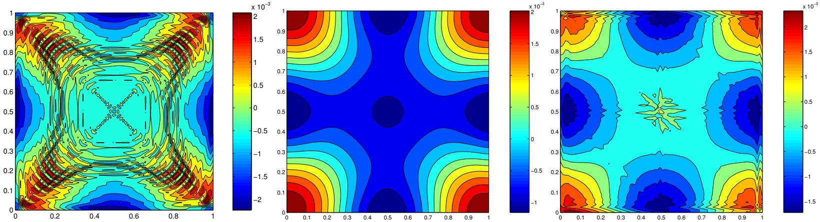


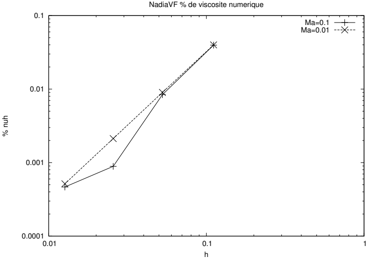
FIG.: fluctuations $\rho - 1$ à $Ma = 0.1$ (NadiaVF, NadiaDF, NadiaLES)

- *allure identique à* $Ma = 0.01$ *avec une amplitude plus faible*

	NadiaVF	NadiaDF WENO	NadiaDF Padé	NadiaLES
$Ma = 0.1$	$0.37\,10^{-2}$	$0.34\,10^{-2}$	$0.34\,10^{-2}$	$0.44\,10^{-2}$
$Ma = 0.01$	$0.84\,10^{-4}$	$0.34\,10^{-4}$	$0.34\,10^{-4}$	$0.38\,10^{-3}$

TAB.: maximum des fluctuations de densité: $\rho_{max} - \rho_{min}$ en 80^2

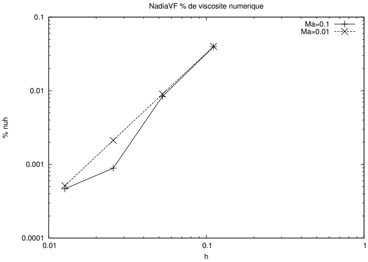
Viscosité numérique ν_h des schémas fonction de h et Ma

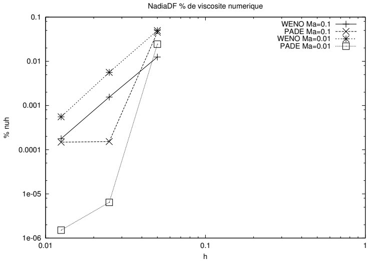


$$\frac{\|\rho U\|_{t=t_f}}{\|\rho U\|_{t=0}} = e^{-2\nu_e \pi^2 t_f}$$

$$\nu_e = \nu + \nu_h$$

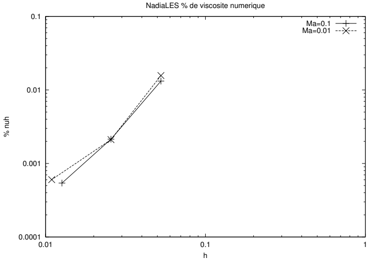
Viscosité numérique ν_h des schémas fonction de h et Ma





$$\frac{\|\rho U\|_{t=t_f}}{\|\rho U\|_{t=0}} = e^{-2\nu_e \pi^2 t_f}$$

$$\nu_e = \nu + \nu_h$$



Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si *CFL* < 1

- Analyse en un point (près de la paroi) pour $CFL = 0.5$ et 10.0

FIG.: fluctuations en un point $(0.5, 0.12)$ pour ρU, , ρV et E_t à $Ma = 0.1$

Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

célérité $c_0 = Ma^{-1} \rightsquigarrow$ ondes acoustiques générées par la C.I.

onde dissipée par viscosité

Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si $CFL < 1$

- Analyse en un point (près de la paroi) pour $CFL = 0.5$ et 10.0

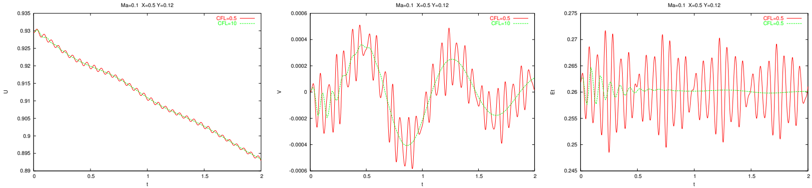


FIG.: fluctuations en un point $(0.5, 0.12)$ pour ρU, ,ρV et E_t à $Ma = 0.1$

Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

célérité $c_0 = Ma^{-1} \rightsquigarrow$ ondes acoustiques générées par la C.I.
onde dissipée par viscosité

Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si $CFL < 1$

- Analyse en un point (près de la paroi) pour $CFL = 0.5$ et 10.0

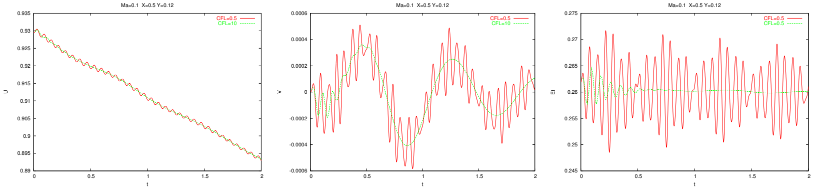
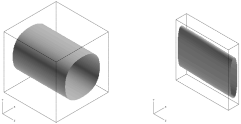


FIG.: fluctuations en un point $(0.5, 0.12)$ pour ρU, ,ρV et E_t à $Ma = 0.1$

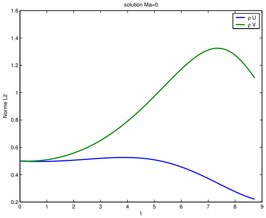
Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

célérité $c_0 = Ma^{-1} \rightsquigarrow$ ondes acoustiques générées par la C.I.
onde dissipée par viscosité

Compression d'un tourbillon



- Model du tumble dans une chambre de combustion



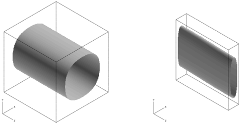
Parametres

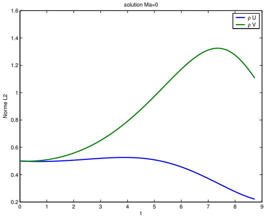
$$Re = \frac{U_{max} L(0)}{\nu} = 1000 \text{ (stable)}$$
$$L(t) = 1 - \frac{V_p}{\omega} + \frac{V_p}{\omega} \sin \omega t$$
$$V_p = 0,144\,,\ \omega = 0,36$$

solution analytique

- tourbillon compressé
- solution $Ma = 0$
- $\rho(t) = \rho_0 \frac{L(0)}{L(t)}$, $p_0 = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}$
- accélération suivant v
- dissipation visqueuse

Compression d'un tourbillon





- Model du tumble dans une chambre de combustion

Parametres

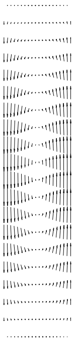
$$Re = \frac{U_{max} L(0)}{\nu} = 1000 \text{ (stable)}$$
$$L(t) = 1 - \frac{V_p}{\omega} + \frac{V_p}{\omega} \sin \omega t$$
$$V_p = 0,144 \,,\ \omega = 0,36$$

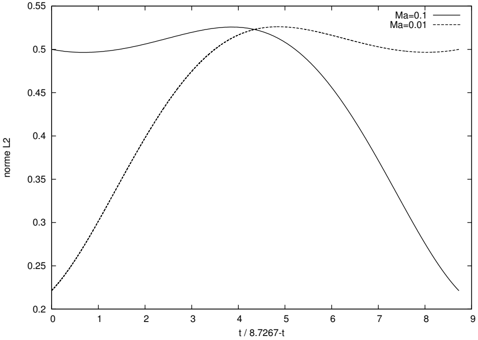
solution analytique

- tourbillon compressé
- solution $Ma = 0$
- $\rho(t) = \rho_0 \frac{L(0)}{L(t)}, p_0 = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}$
- accélération suivant v
- dissipation visqueuse

Solution numérique

- Evolution de la vitesse au cours du temps pour $Ma = 0.1$ et $Ma = 0.01$



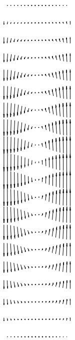


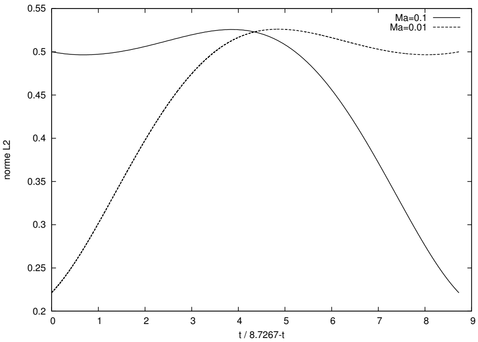
Champ de vitesse

tous les schémas prédisent un champ de vitesse ≈ solution $Ma = 0$

Solution numérique

- Evolution de la vitesse au cours du temps pour $Ma = 0.1$ et $Ma = 0.01$





Champ de vitesse

tous les schémas prédisent un champ de vitesse ≈ solution $Ma = 0$

Fluctuation de densité

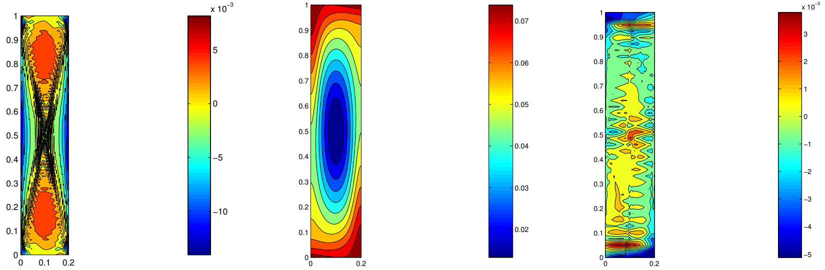


FIG.: fluctuations $\rho - 5$ à $Ma = 0.1$ (NadiaVF, NadiaDF, NadiaLES)

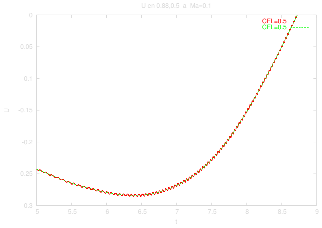
	NadiaVF	NadiaWENO	NadiaPADE	NadiaLES
$Ma = 0.1$	$0.40\,10^{-1}$	$0.56\,10^{-1}$	$0.66\,10^{-1}$	$0.11\,10^{-1}$
$Ma = 0.01$	$0.41\,10^{-3}$	$0.44\,10^{-1}$	$0.29\,10^{-1}$	$0.97\,10^{-2}$

TAB.: maximum des fluctuations de densité: $\rho_{max} - \rho_{min}$ (fin comp.) en 40^2

Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si $CFL < 1$

- Analyse en un point (près du piston) pour $CFL = 0.5$ et 10.0



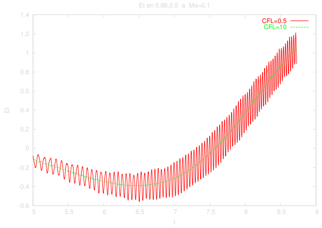


FIG.: fluctuations en un point $(0.88, 0.5)$ pour ρU et E_t à $Ma = 0.1$

Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

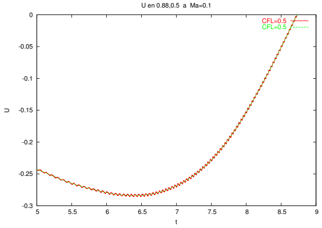
ondes acoustique ($c_0 \approx Ma^{-1}$) amplifiées par la compression

$\rightsquigarrow$ pble avec les schémas d'ordre élevé (instabilité)

Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si $CFL < 1$

- Analyse en un point (près du piston) pour $CFL = 0.5$ et 10.0



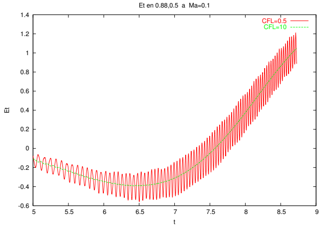


FIG.: fluctuations en un point $(0.88, 0.5)$ pour ρU et E_t à $Ma = 0.1$

Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

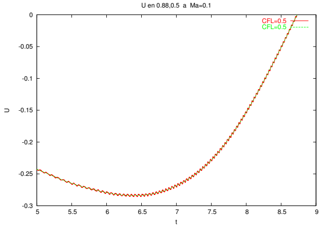
ondes acoustique ($c_0 \approx Ma^{-1}$) amplifiées par la compression

$\rightsquigarrow$ pble avec les schémas d'ordre élevé (instabilité)

Propagation d'ondes

avec les schémas d'ordre élevé et le schéma implicite si $CFL < 1$

- Analyse en un point (près du piston) pour $CFL = 0.5$ et 10.0



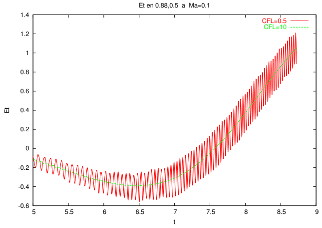


FIG.: fluctuations en un point $(0.88, 0.5)$ pour ρU et E_t à $Ma = 0.1$

Schéma implicite amortit les ondes si $CFL > 1$

ondes acoustique ($c_0 \approx Ma^{-1}$) amplifiées par la compression

$\rightsquigarrow$pble avec les schémas d'ordre élevé (instabilité)

Coût des différents schémas

	NadiaVF	NadiaPADE	NadiaWENO	NadiaLES
$Ma = 0.1$	837	14 900	52 200	17 216
$Ma = 0.01$	7686		298 700	156 000

TAB.: Nbre d'itérations en temps cas 40^2

Temps CPU par itération

- NadiaVF (Pentium IV 2.7 Ghz):$\approx 0.3s\,(Ma = 0.01)$ et $\approx 0.7s\,(Ma = 0.1)$
- NadiaDF (Pentium IV 1.7 Ghz) PADE: $\approx 0.04s$ et WENO:$\approx 0.07s$
- NadiaLES (Pentium IV 1.7 Ghz) maillage 3D $(3 * 40^2)$:$\approx 0.6s$

Coût des différents schémas

	NadiaVF	NadiaPADE	NadiaWENO	NadiaLES
$Ma = 0.1$	837	14 900	52 200	17 216
$Ma = 0.01$	7686		298 700	156 000

TAB.: Nbre d'itérations en temps cas 40^2

Temps CPU par itération

- NadiaVF (Pentium IV 2.7 Ghz):$\approx 0.3s\,(Ma = 0.01)$ et $\approx 0.7s\,(Ma = 0.1)$
- NadiaDF (Pentium IV 1.7 Ghz) PADE: $\approx 0.04s$ et WENO:$\approx 0.07s$
- NadiaLES (Pentium IV 1.7 Ghz) maillage 3D $(3 * 40^2)$:$\approx 0.6s$

Conclusion

comparaison des schémas à bas Mach:

- schéma explicite de Roe “NadiaLES” le plus diffusif, mais assez robuste
- schémas d’ordre élevée “NadiaDF” les moins diffusifs
  mais captent des ondes (instabilité ?),
  très sensibles aux C.L.
- schéma implicite “NadiaVF” centré le plus efficace à bas Mach
  si $CFL > 1$ filtrage des ondes acoustiques générées par les C.I.

Poursuite des études

analyse des côuts en 3D pour de la LES
comparaison avec des solutions compressibles (analyse asymptotique)

Conclusion

comparaison des schémas à bas Mach:

- schéma explicite de Roe “NadiaLES” le plus diffusif, mais assez robuste
- schémas d’ordre élevée “NadiaDF” les moins diffusifs
  mais captent des ondes (instabilité ?),
  très sensibles aux C.L.
- schéma implicite “NadiaVF” centré le plus efficace à bas Mach
  si $CFL > 1$ filtrage des ondes acoustiques générées par les C.I.

Poursuite des études

analyse des côuts en 3D pour de la LES
comparaison avec des solutions compressibles (analyse asymptotique)

Compression en 3D

- Calcul spectral $Ma = 0$ (Le Penven 2002)

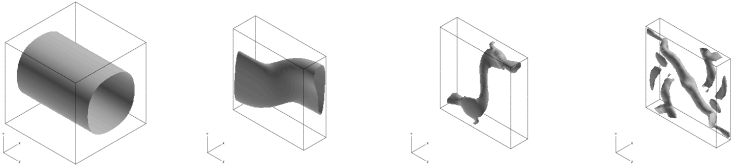


FIG.: compression d'un tourbillon perturbé en 3D à $Re = 6000$ ($t = 0, 3, 5, 8$)