Compte rendu du TP “danse des pendules”

Marc BUFFAT, dpt mécanique, université Lyon 1

1 Introduction

L’objectif de cette étude est de construire un modèle explicatif du mouvement de pendules dansants (swinging pendulum). Une expérience illustrant cette danse des pendules a été réalisée pour un cours d’introduction à la physique “Harward Natural Sciences Lectures” par Tom Fuller

Quinze pendules simples non couplés de longueurs monotones croissantes dansent ensemble pour produire des ondes visuelles progressives, des ondes stationnaires, des battements et (apparemment) des mouvements aléatoires.

- vidéo youtube de l’expérience: https://www.youtube.com/watch?v=2TEkwdLlw6w

2 Méthode d’analyse

Pour construire un modèle, nous allons tout d’abord étudier le mouvement du pendule simple, en utilisant les possibilités de visualisation des notebooks Python. Puis nous nous intéresserons au mouvement de 2 pendules de longueurs différentes pour ensuite passer au cas d’une série de 15 pendules de longueurs croissantes permettant de retrouver les mouvements observés dans la vidéo.

2.1 Mouvement du pendule simple

On considère un pendule simple, constitué d’une masse m fixée à l’extrémité d’un fil de longueur l_1 fixé en O et soumis à la gravité g.

La position P de la masse s’écrit en fonction de l’angle θ_1 du fil par rapport à la verticale y:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +l_1 \sin\theta_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

Le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton) permet d’écrire la loi du mouvement sous la forme d’une équation différentielle du second ordre.

$$ml_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -mg \sin\theta_1$$

Dans le cas de petites oscillations, l'angle θ_1 reste petit et on peut approximer $\sin\theta_1 \approx \theta_1$, ce qui permet de linéariser l'équation différentielle précédente:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\omega_1^2\theta_1 \text{ avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

dont le paramétre est la pulsation ω_1.

En supposant que le pendule est laché avec un angle $\theta_1(t=0) = \theta_0$ à l'instant initial sans vitesse initiale $\dot{\theta_1}(t=0) = 0$, la solution de l'équation linéarisée est la solution classique du pendule simple:

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t)$$

qui indique que le pendule oscille de façon périodique sinusoïdale avec une période T_1:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

qui dépend donc de sa longueur l_1.

2.2 Cas de 2 pendules simples

En prenant 2 pendules de longueurs l_1 et l_2, accrochés à une même barre et lachés avec le même angle θ_0.

Les angles de rotations $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont donnés par:

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l_1}}t$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l_2}}t$$

Si on choisit bien les longueurs l_1 et l_2 , on peut avoir des mouvements en phase ou en opposition de phase avec une période commune. Pour cela il faut que les périodes des 2 pendules soient dans un rapport rationnel:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{p} \text{ avec } m, p \in \mathbb{N}^+$$

ce qui impose le rapport des longueurs. On choisit par exemple:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m^2}{(m-1)^2} \text{ avec } m = 20$$

Si on part du même angle θ_0 à $t = 0$, alors au bout d'un temps $t_f = mT_2$ les 2 pendules se retrouvent à la même position θ_0.

2.3 cas de N pendules dansants

On considère N pendules simples de longueur l_i accrochés sur une même barre. A l'instant initiale, on les lâche avec le même angle θ_0. Leur mouvement $\theta_i(t)$, en petites oscillations, est donné par l'équation

$$\theta_i(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l_i}}t$$

En choisissant les longueurs l_i telle que s

$$l_i = l_0 \frac{M^2}{(M-i)^2} \text{ avec } M > N$$

les pendules vont se retrouver en phase au bout de M périodes du plus grand l. En effet leurs périodes sont dans un rapport rationnel du type $\frac{M}{M-i}$

Leur mouvement d'ensemble ressemble alors à une propagation d'ondes, d'où le nom **"swinging pendulum"**

3 Analyse des résultats

3.1 cas de 2 pendules

En traçant la trajectoire de 2 pendules dont les périodes sont dans un rapport rationnel, on obtiens la courbe de Lissajous algébrique suivante sur la figure 1:

qui démontre que les 2 trajectoires sont périodiques avec une période commune:

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t) \text{ et } \theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_2 t)$$

ou $n_1 = \omega_1/\omega_2$ est un nombre rationnel: ici $n_1 = 20/19$

3.2 cas de N pendules

En traçant sur la figure 2 la position, à différents instants, des $N = 15$ pendules simples dont les périodes sont dans dans un rapport rationnel par rapports au premier $n_k = 20/(20-k)$, on observe bien le mouvement périodique de l'ensemble enregistrés dans la vidéo expérimentale avec des ondes visuelles progressives, des battements, des oppositions de phase, ..

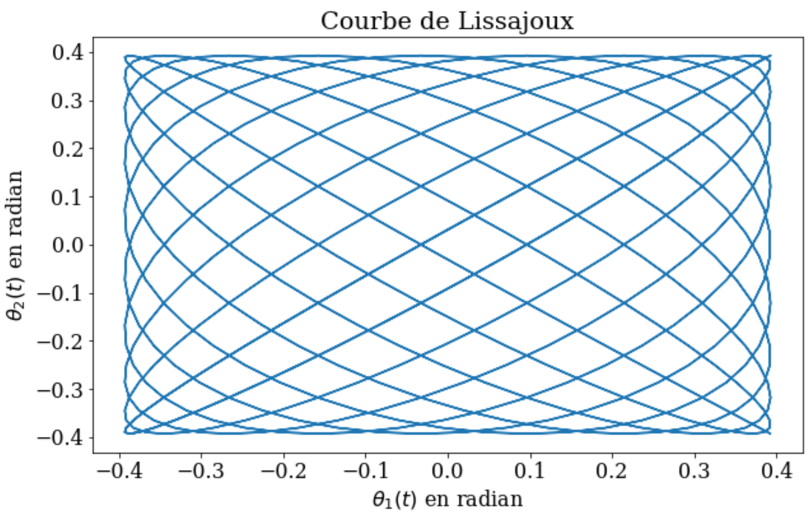

Figure 1: FIG1: trajectoire de 2 pendules

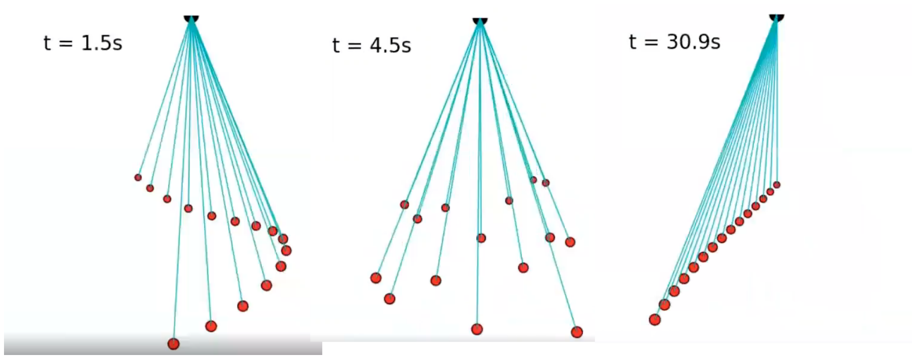

Figure 2: FIG2: position des 15 pendules dansants à différents instants

4 Conclusion

A l'aide d'une expérience numérique utilisant des notebooks Jupyter, un peu de code Python et des visualisations de simulation numérique, on a pu expliquer **la danse des pendules** observée sur la vidéo de l'expérience initiale. On a ainsi montré que

- le mouvement du pendule simple est sinusoïdal avec une période dépend de la racine carrée de sa longueur
- dans le cas de 2 pendules dont le rapport des longueurs est un rapport rationnel élevé au carré, on obtiens une courbe classique de Lissajous.
- en prenant une série de 15 pendules de longueurs croissantes dans un rapport rationnel élevé au carré, on retrouve les mouvements observés dans la vidéo initiale.
- le mouvement dansant des pendules est donc juste une conséquence (visuelle) du mouvement du pendule simple. Il n'y a en effet aucune interaction entre les différents pendules.