

Influence de l'effet de peau sur la rotation d'un rotor fluide*

L. Martin Witkowski et Ph. Marty^a

Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (CNRS-UJF-INPG) BP53X, 38041 Grenoble Cedex, France

Reçu : 25 avril 1997 / Révisé : 15 septembre 1997 / Accepté : 2 octobre 1997

Abstract. A rotating magnetic field creates forces in a liquid metal column which therefore rotates. In the case of an infinitely long column, we solve the induction and Navier-Stokes equations. The results are described for the fully coupled case which arises when the Hartmann number Ha and the shield parameter R_ω are larger than unity. In this case, we distinguish between two velocity regimes upon the value of R_ω with respect to $\frac{Ha}{\sqrt{2}}$.

Résumé. Un champ magnétique tournant autour d'une colonne de métal liquide crée des forces qui la mettent en rotation. Dans le cas d'une colonne de hauteur infinie, il est proposé une méthode de résolution des équations couplées régissant la distribution du champ magnétique et du champ de vitesse. Les résultats sont détaillés quand le couplage est fort ce qui correspond à un nombre de Hartmann Ha et un paramètre d'écran R_ω grands devant l'unité. Dans ce cas, pour Ha donné, deux régimes apparaissent pour le champ de vitesse suivant que R_ω est supérieur ou inférieur à $\frac{Ha}{\sqrt{2}}$.

PACS. 47.65.+a Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics – 47.60.+i Flow in ducts, channels, nozzles and conduits – 84.50.+d Electric motors

1 Introduction

Quand un métal liquide s'écoule dans une conduite, les métallurgistes peuvent chercher à mettre le fluide en rotation, notamment pour le centrifuger. Les températures de travail de la plupart des métaux rendent souvent mal aisée l'utilisation des moyens mécaniques traditionnels pour des raisons d'usure, de contraintes thermiques ou de contamination. Une alternative est d'utiliser un champ magnétique tournant généré par un stator, le métal liquide faisant office de rotor.

Il est possible de trouver un résumé des études effectuées précédemment dans les articles de Moffatt [5] pour les cylindres de hauteur infinie et de Gelfgat [3] pour ceux de hauteur finie.

Dans le cas d'un cylindre de section circulaire et de hauteur infinie, la géométrie très simple permet de faire de nombreuses simplifications et beaucoup de résultats ont déjà été obtenus. Les équations régissant le champ magnétique, la densité de courant électrique et le champ de vitesse sont couplées, ce qui rend difficile la résolution analytique des équations. Pour cette raison, toutes les études antérieures ont utilisé des hypothèses simplificatrices afin de résoudre séparément les problèmes hydrodynamique et électromagnétique.

En 1965, Moffatt [4] s'est restreint au cas où la vitesse du fluide est négligeable devant la vitesse du

champ magnétique. Cette situation sera par la suite dénommée : hypothèse de rotor bloqué. Dans ce cas, le fluide est considéré comme un conducteur solide immobile par rapport au champ. Le système d'équations est résolu en deux étapes. La première est la résolution des équations du champ magnétique. Ainsi le courant électrique et la force électromagnétique sont déduits du calcul du champ magnétique. La force obtenue a une partie constante et une partie fluctuante. Seule la partie constante de la composante azimutale de la force est rotationnelle. Ce qui a conduit Moffatt, dans la deuxième étape (la résolution des équations de Navier-Stokes), à chercher un champ de vitesse où seule la composante azimutale est non nulle. Les forces d'inertie sont donc nulles et les forces visqueuses s'équilibrent avec les forces électromagnétiques. Il a obtenu l'expression exacte du champ magnétique qui est exprimé à l'aide de fonctions de Bessel mais pour obtenir le champ de vitesse, il s'est mis dans le cas où le temps d'une rotation de champ magnétique était faible devant le temps de diffusion du champ dans le cylindre. Cette situation est caractérisée par un paramètre d'écran grand devant l'unité (ce nombre sans dimension est défini dans la section suivante). Le champ magnétique est alors expulsé dans une mince peau au bord du cylindre et les fonctions de Bessel peuvent être remplacées par leur valeur asymptotique. Il est alors possible d'obtenir une expression simple du champ de vitesse. Cet article montre que le couple moteur se limite à l'épaisseur de peau et que la partie centrale est entraînée en bloc par viscosité.

* Le contenu de cet article a été présenté à NUMELEC'97.

^a e-mail: Philippe.Marty@hmg.inpg.fr.

En 1972, Dahlberg [2] a obtenu un champ de vitesse par développement en série pour un paramètre d'écran quelconque. Dans le cas où le temps d'une rotation du champ est grand devant le temps de diffusion (qui est la situation de petits paramètres d'écran devant l'unité), le champ magnétique pénètre parfaitement dans le cylindre et son expression se simplifie. Le profil de la vitesse azimutale devient alors un simple polynôme de degré 3. Pour Moffatt comme pour Dahlberg une fois le champ de vitesse connu, il est nécessaire de vérifier que le maximum de la vitesse est négligeable devant la vitesse du champ magnétique pour être consistant avec l'hypothèse de rotor bloqué. Les forces motrices ne doivent pas être trop grandes devant les possibilités de freinage des forces visqueuses. Le rapport de ces forces est caractérisé par le nombre adimensionnel de Hartmann (défini dans la section suivante). La limitation sur le maximum de la vitesse se traduit par une contrainte sur ce nombre.

En 1977, Alemany et Moreau [1] se sont placés dans le cas où le champ magnétique est intense (grand nombre de Hartmann), à paramètre d'écran faible. Le fluide tourne alors au synchronisme. Le champ magnétique est connu mais le courant électrique dépend de la vitesse. La partie fluctuante des forces électromagnétiques n'est plus irrotationnelle et, en toute rigueur, on devrait envisager que les lignes de courant ne soient plus circulaires. En admettant cependant que le champ de vitesse est uniquement azimutal, les équations de Stokes s'intègrent facilement.

La bibliographie fait apparaître que les écoulements pour un nombre de Hartmann et un paramètre d'écran quelconque n'ont pas été traités même dans le cas où l'inertie est négligeable. En utilisant cette dernière hypothèse, cette étude résout le système complet d'équations et s'intéresse particulièrement au cas où le champ est intense (fort Hartmann) et les fréquences élevées (grand paramètre d'écran), correspondant à un couplage fort des équations.

2 Modélisation

Un fluide isotherme, de viscosité cinématique ν , incompressible, de densité ρ , de conductivité électrique σ , de perméabilité magnétique μ , placé dans une conduite isolante, de longueur infinie et de section circulaire est soumis à un champ magnétique tournant. Ce champ est créé par une nappe de courant de la forme :

$$\mathbf{j} = -j_0 \cos(p\theta - \omega t) \mathbf{k}$$

où j_0 désigne la densité linéique de courant, p le nombre de paires de pôles et ω la pulsation. Cette nappe placée en $r = a$ est entourée d'une culasse magnétique de perméabilité infinie.

On choisit un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) tel que \mathbf{k} , vecteur unité de l'axe des z , soit porté par l'axe du cylindre comme indiqué sur la figure 1. Les équations qui régissent le problème sont :

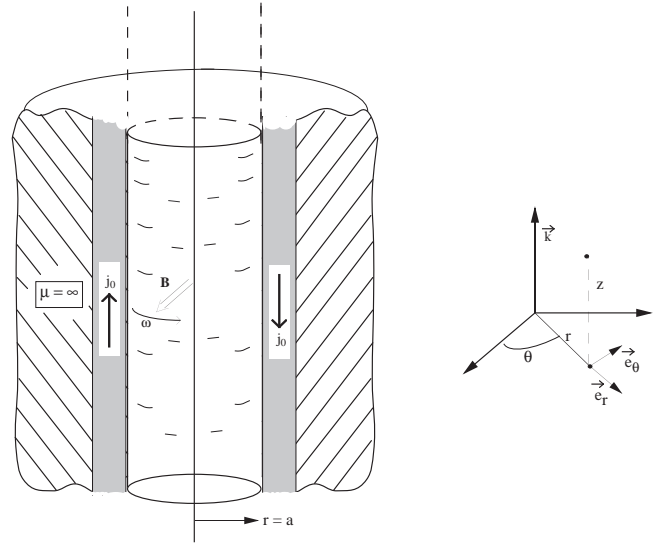


Fig. 1. Système de coordonnées.
[Coordinate system.]

- les équations de l'induction écrites à l'aide du potentiel vecteur \mathbf{A} :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{A} - \nabla \varphi \quad (1)$$

(avec la jauge de Coulomb $\text{div} \mathbf{A} = 0$) ;

- la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi + \mathbf{V} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{A} \right); \quad (2)$$

- les équations de Stokes pour le champ de vitesse \mathbf{V} et de pression p :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (4)$$

L'étude des symétries du problème [2] permet d'écrire : $w = E_{r,\theta} = A_{r,\theta} = j_{r,\theta} = \varphi = 0$ pour $z = 0$. Comme de plus $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, les relations précédentes sont vraies pour tout z . Les variables w , \mathbf{E} , φ désignent respectivement la composante axiale de la vitesse, le champ électrique et le potentiel électrique.

Les conditions aux limites du champ de vitesse traduisent l'adhérence du fluide à la paroi. Celles du champ magnétique traduisent la conservation du flux radial de \mathbf{B} en $r = a$ et relie le saut de sa composante tangentielle à l'intensité de la nappe.

En adimensionalisant les longueurs par a , les vitesses par $\frac{\omega a}{p}$, la norme du potentiel vecteur \mathbf{A} par $B_0 a$, l'intensité du courant surfacique j_0 par $\frac{B_0}{\mu}$ les équations font apparaître deux nombres adimensionnels : le nombre de Hartmann : $\text{Ha} = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$ qui caractérise le rapport des forces électromagnétiques aux forces visqueuses et le

paramètre d'écran : $R_\omega = \mu\sigma\frac{\omega}{p}a^2$ qui traduit la pénétration du champ magnétique dans le métal.

En admettant, en première approximation, que la partie fluctuante des forces n'engendre qu'une faible perturbation sur l'écoulement, le champ de vitesse et le potentiel vecteur peuvent être cherchés de la forme $v(r)\mathbf{e}_\theta$ et $(A_1(r)\cos(p\theta - \omega t) + A_2(r)\sin(p\theta - \omega t))\mathbf{k}$, on obtient ainsi le système suivant :

$$\mathcal{H}_p(A_1) = -pR_\omega\left(1 - \frac{v}{r}\right)A_2 \quad (5)$$

$$\mathcal{H}_p(A_2) = +pR_\omega\left(1 - \frac{v}{r}\right)A_1 \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_1(v) = -\frac{p^2\text{Ha}^2}{2r}\left(1 - \frac{v}{r}\right)(A_1^2 + A_2^2) \quad (7)$$

où \mathcal{H}_p désigne l'opérateur $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2}\right)$.

Les conditions limites s'écrivent ici :

$$\text{en } r = 0 \quad A_1(0) = A_2(0) = 0 \text{ et } v(0) = 0, \quad (8)$$

$$\text{en } r = 1 \quad A_1'(1) = -1, A_2'(1) = 0 \text{ et } v(1) = 0. \quad (9)$$

3 Méthode numérique et validation

Le système d'équations (5 à 9) peut être résolu numériquement. C'est un problème aux limites en deux points. Deux méthodes différentes ont été testées. Les routines de calcul sont prises dans la bibliothèque SLATEC :

- une méthode de tir,
- une méthode de relaxation.

Dans la première méthode, à chaque tir on utilise un algorithme de type Adams-Bashforth-Moulton prédicteur correcteur à pas variable. Pour trouver les conditions initiales du tir suivant, nous avons utilisé un algorithme de résolution Powell hybride. Les itérations sont stoppées quand les conditions limites deviennent proches de la valeur cherchée.

La deuxième méthode consiste en une discrétisation des équations différentielles ordinaires sur l'axe radial. Le problème est ainsi transformé en résolution d'un système linéaire tridiagonal. Chaque équation (ou encore chaque système) est résolu séquentiellement et à chaque itération on relaxe la solution. On estime que la méthode a convergé lorsque l'écart entre deux itérations successives devient suffisamment faible.

La première méthode est rapide mais présente l'inconvénient d'être très sensible aux conditions initiales et rend ainsi difficile les études systématiques de l'influence d'un paramètre. La deuxième méthode est plus lente car elle nécessite parfois une forte sous-relaxation (notamment pour de fort Ha ou R_ω) mais est robuste et simple de mise en œuvre. C'est pourquoi nous l'avons adoptée et détaillée en annexe. La première méthode a servi à confirmer les résultats de la seconde pour quelques valeurs tests de Ha et R_ω . Nous avons noté que pour l'ensemble des résultats présentés une discrétisation sur 150 points régulièrement répartis sur l'axe radial garantissait un écart faible entre les deux méthodes.

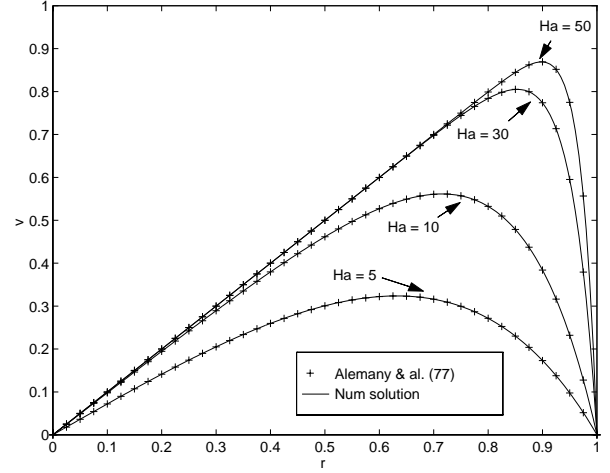


Fig. 2. Vitesse azimutale en fonction de r pour $R_\omega = 0,01$ et $\text{Ha} = 5, 10, 30, 50$: comparaison de la présente méthode avec les résultats d'Alemany *et al.* [1].

[Azimuthal velocity *versus* r for $R_\omega = 0,01$ and $\text{Ha} = 5, 10, 30, 50$: comparison of the present method with Alemany *et al.* [1] results.]

Afin de tester la qualité de la méthode numérique employée, nous nous sommes d'abord placé dans certains cas particuliers où une solution analytique existe.

Ainsi, pour un petit paramètre d'écran et pour un nombre de Hartmann quelconque, l'expression analytique de la vitesse azimutale est proposée par Alemany *et al.* [1] :

$$v = r - \frac{\mathcal{I}_{\frac{1}{p}}\left(\frac{\text{Ha} r^p}{p\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{I}_{\frac{1}{p}}\left(\frac{\text{Ha}}{p\sqrt{2}}\right)} \quad (10)$$

où \mathcal{I}_β désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre β . Sur la figure 2, on note le très bon accord obtenu entre la vitesse azimutale obtenue numériquement et analytiquement. Par ailleurs, la figure 2 permet de voir que l'augmentation du nombre de Hartmann met le fluide parfaitement au synchronisme dans le cœur. Ce premier test montre le bon comportement de la résolution de l'équation (7) du champ de vitesse.

Pour des valeurs quelconques du paramètre d'écran, on remarque sur la figure 3 le très bon accord de notre solution avec la vitesse analytique (Éq. (11)) obtenue par Dahlberg [2]. Cette série, dans les cas que nous avons tracé, converge assez vite et nous n'avons retenu que les cinq premiers termes.

$$v = \frac{\text{Ha}^2}{16} \frac{1}{|D|^2} r \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - r^{4n+2}) \left(\frac{1}{4}R_\omega\right)^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!(n+1)!^2} \quad (11)$$

où $D = \mathcal{J}_0(\sqrt{iR_\omega}) - \mathcal{J}_2(\sqrt{iR_\omega})$ et où $\mathcal{J}_\beta(x)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre β . La figure 4 montre l'allure des lignes de champ magnétique qui

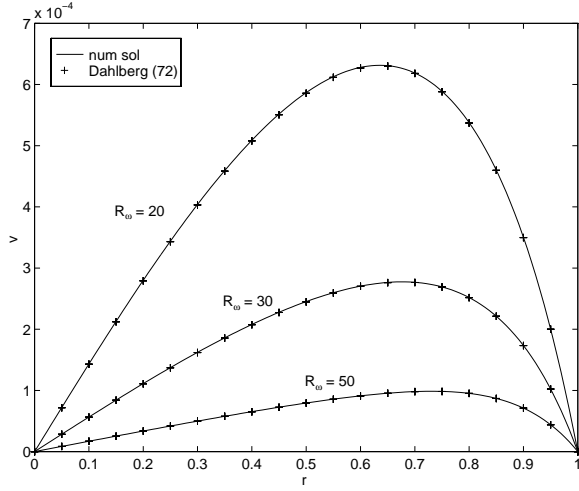


Fig. 3. Vitesse azimutale en fonction de r pour $Ha = 1$ et $R_\omega = 20, 30, 50$: comparaison de la présente méthode avec les résultats de Dahlberg [2].

[Azimuthal velocity *versus* r for $Ha = 1$ and $R_\omega = 20, 30, 50$: comparison of the present method with Dahlberg [2] results.]

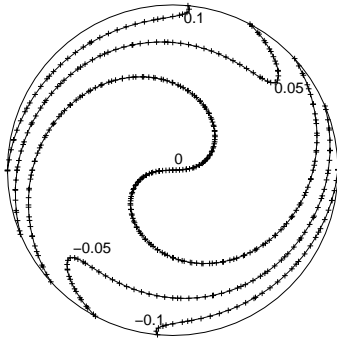


Fig. 4. Lignes de champ magnétique pour $Ha = 1$ et $R_\omega = 50$; - : solution numérique, + : solution analytique.

[Magnetic field lines for $Ha = 1$ and $R_\omega = 50$; - : numerical solution, + : analytical solution.]

se superposent exactement avec les lignes de champ données par leur expression analytique $A_z = \Re\left(\frac{-2J_1(\sqrt{iR_\omega}r)}{\sqrt{iR_\omega}D} e^{i(p\theta - \omega t)}\right)$. Ce deuxième test constitue une validation de la résolution de l'équation du champ magnétique mais aussi de son couplage avec l'équation du mouvement.

4 Résultats

Afin de faire une étude paramétrique de l'influence des nombres sans dimension R_ω et Ha nous avons tracé, sur la figure 5, l'évolution de $\frac{v_{\max}}{Ha^2}$ en fonction de R_ω pour différents Ha (v_{\max} désigne la valeur maximum de la vitesse azimutale sur $r \in [0, 1]$).

Pour $R_\omega \ll 1$ (que l'on peut raisonnablement étendre à $R_\omega < 1$) et pour tout Ha , v_{\max} est indépendant de R_ω .

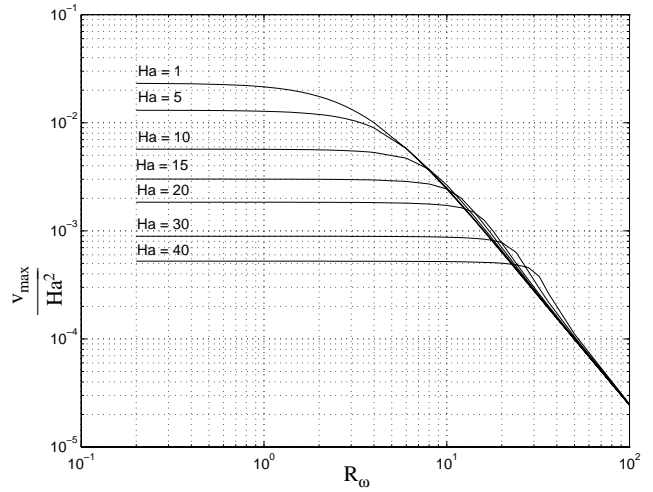


Fig. 5. Evolution de $\frac{v_{\max}}{Ha^2}$ en fonction de R_ω pour $Ha = 1, 5, 10, 15, 20, 30$ et 40 .

[Evolution of $\frac{v_{\max}}{Ha^2}$ *versus* R_ω for $Ha = 1, 5, 10, 15, 20, 30$ and 40 .]

Cela montre que le paramètre d'écran R_ω n'est plus un paramètre pertinent du problème quand il est faible devant l'unité. En effet dans ce cas "la peau" de confinement du champ est plus grande que le rayon du cylindre ce qui n'a pas beaucoup de sens. Quand Ha est grand devant l'unité, le fluide est au synchronisme $v_{\max} \simeq O(1)$.

Pour $R_\omega > 1$, les courants induits créent un champ magnétique qui s'oppose à la pénétration, dans le cœur, du champ imposé par la nappe. La force motrice est ainsi diminuée et le maximum de vitesse dans le fluide diminue.

- Quand $Ha < 1$, la vitesse du fluide est négligeable devant la vitesse du champ quelle que soit la valeur de R_ω . L'approximation de rotor bloqué est donc valable et v_{\max} peut être déduit de l'équation (11). Le cas limite $Ha = 1$ est tracé sur la figure 5. Quand $R_\omega \gg 1$, la décroissance de v_{\max} est telle que $\frac{v_{\max}}{Ha^2} \simeq R_\omega^{-2}$ ce qui est en accord avec l'analyse asymptotique de Moffatt [4]. L'interprétation physique de cette loi d'évolution est simple et sera présentée dans la section (5.3).
- Quand $Ha > 1$, le fluide est au synchronisme tant que $R_\omega < \frac{Ha}{\sqrt{2}}$. Cette situation n'a jamais été envisagée dans les études précédentes. Quand R_ω augmente, la vitesse du fluide décroît de manière non visible sur la figure 5. Dès que $R_\omega > \frac{Ha}{\sqrt{2}}$, le fluide perd le synchronisme et l'approximation de rotor bloqué redevient valable. En conséquence, les courbes se confondent avec la courbe obtenue pour $Ha = 1$.

Pour mieux comprendre cette transition, prenons le cas particulier $Ha = 30$. Sur la figure 6, les profils radiaux de la vitesse azimutale sont reportés pour différents R_ω et différents p . Tant que R_ω vérifie $R_\omega < \frac{Ha}{\sqrt{2}}$, le fluide tourne partout au synchronisme sauf dans la couche de Hartmann au voisinage de la paroi.

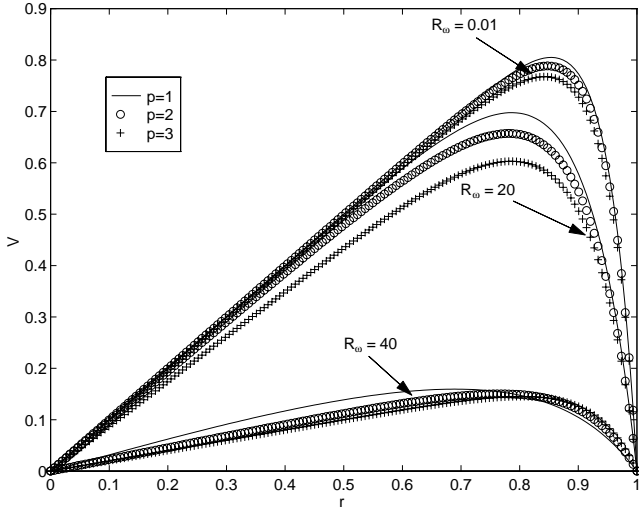


Fig. 6. Vitesse azimutale en fonction de r pour $Ha = 30$ et $R_\omega = 0,01, 20$ et 40 .

[Azimuthal velocity v versus r for $Ha = 30$ and $R_\omega = 0,01, 20$ and 40 .]

La figure 6 illustre aussi le fait que pour un grand nombre de Hartmann le nombre de paires de pôles ne modifie pas de manière très sensible le comportement du profil radial de la vitesse en fonction de R_ω . En effet, une augmentation du nombre de paires de pôles confine le champ magnétique au voisinage de la paroi, ce qui affaiblit son intensité dans le cœur. Cependant, la densité de courant est proportionnelle à la vitesse de glissement qui est partout nulle sauf près de la paroi. En conséquence, le couple moteur n'est que peu affecté par une augmentation du nombre de paires de pôles ($p = 1, 2, 3$).

Les lignes de champ magnétique sont représentées sur les figures 7a, 7b, 7c pour différents R_ω et différents p . Pour un faible paramètre d'écran, figure 7a, le champ pénètre parfaitement dans le cylindre et les lignes de champ ne sont pas modifiées par la présence du métal. La figure 7c illustre une situation où l'approximation de rotor bloqué commence à être valable : la différence de vitesse entre le champ et le fluide y est suffisamment grande pour négliger la vitesse du fluide dans le calcul du champ magnétique. La figure 7b fait apparaître un découpage du champ magnétique en deux zones (mis en évidence par un cercle que nous avons tracé en pointillé pour $p = 1$) comme pour le champ de vitesse :

- une mince couche à la paroi où le champ est convecté par le fluide ;
- une zone de cœur où le champ ne fait que diffuser du fait que la vitesse est au synchronisme.

5 Discussion

L'approche descriptive des phénomènes qui vient d'être faite ne permet pas d'appréhender la physique des mécanismes mis en jeu. L'objet de cette section, est de faire

une modélisation simplifiée du champ de vitesse et du champ magnétique qui permettra, par la suite, de trouver les ordres de grandeurs caractéristiques des différentes quantités et de donner une explication à la transition entre le régime de synchronisme, où $v_{\max} \approx 1$ et le régime de rotor bloqué où $\frac{v_{\max}}{Ha^2} \approx \frac{cte}{R_\omega^2}$

5.1 Modèle de l'anneau rigide

Le champ de vitesse ne semble que peu affecté par une augmentation de R_ω tant que $R_\omega < \frac{Ha}{\sqrt{2}}$ et que $Ha \gg 1$. Le champ de vitesse est donné par l'expression (10) dont le développement asymptotique pour $Ha \gg 1$ vaut :

$$v \approx r - \frac{e^{\frac{Ha}{\sqrt{2p}}(r^p-1)}}{r^{\frac{p}{2}}} \approx r - e^{\frac{Ha}{\sqrt{2p}}(r^p-1)} \quad (12)$$

et qui est maximum pour $r_s = 1 - \frac{\sqrt{2}}{Ha} \ln\left(\frac{Ha}{\sqrt{2}}\right)$. Approchons la différence de vitesse de rotation entre le fluide et le champ par la fonction :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < r_s, \\ \bar{\omega} = \frac{1}{1-r_s} \int_{r_s}^1 \left(1 - \frac{v}{r}\right) dr \approx \left[\ln\left(\frac{Ha}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} & \text{si } r_s < r < 1. \end{cases} \quad (13)$$

Cela revient à considérer un rotor solide creux (ou dont le cœur est isolant) dont la vitesse angulaire de glissement par rapport au champ est définie par $\bar{\omega}$. Le modèle est représenté sur la figure 8. La notation complexe est utilisée ici pour des commodités de calcul : $A_z(r, \theta, t) = \Re(A(r)e^{i(p\theta - \omega t)})$. En négligeant la courbure dans l'anneau tournant (pour $Ha > 30$, $r_s > 0,85$) et en utilisant le champ de vitesse défini par l'équation (13) les équations pour le potentiel vecteur A_z s'écrivent :

- pour $r_s < r < 1$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \alpha^2 A = 0 \quad (14)$$

$$A = C_1 e^{\alpha r} + C_2 e^{-\alpha r} \quad (15)$$

$$\text{où } \alpha = \sqrt{-ipR_\omega \bar{\omega}} ;$$

- pour $0 < r < r_s$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} A = 0 \quad (16)$$

$$A = C_3 r^p + \frac{C_4}{r^p}. \quad (17)$$

Pour déterminer les quatre constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 les conditions aux limites suivantes sont utilisées :

- en $r = 1$, l'application du théorème d'Ampère donne $\frac{\partial A}{\partial r} = -1$;
- en $r = r_s$, A et sa dérivée sont continus : $[A] = 0$ et $[\frac{\partial A}{\partial r}] = 0$;
- en $r = 0$, $A = 0$ est imposé.

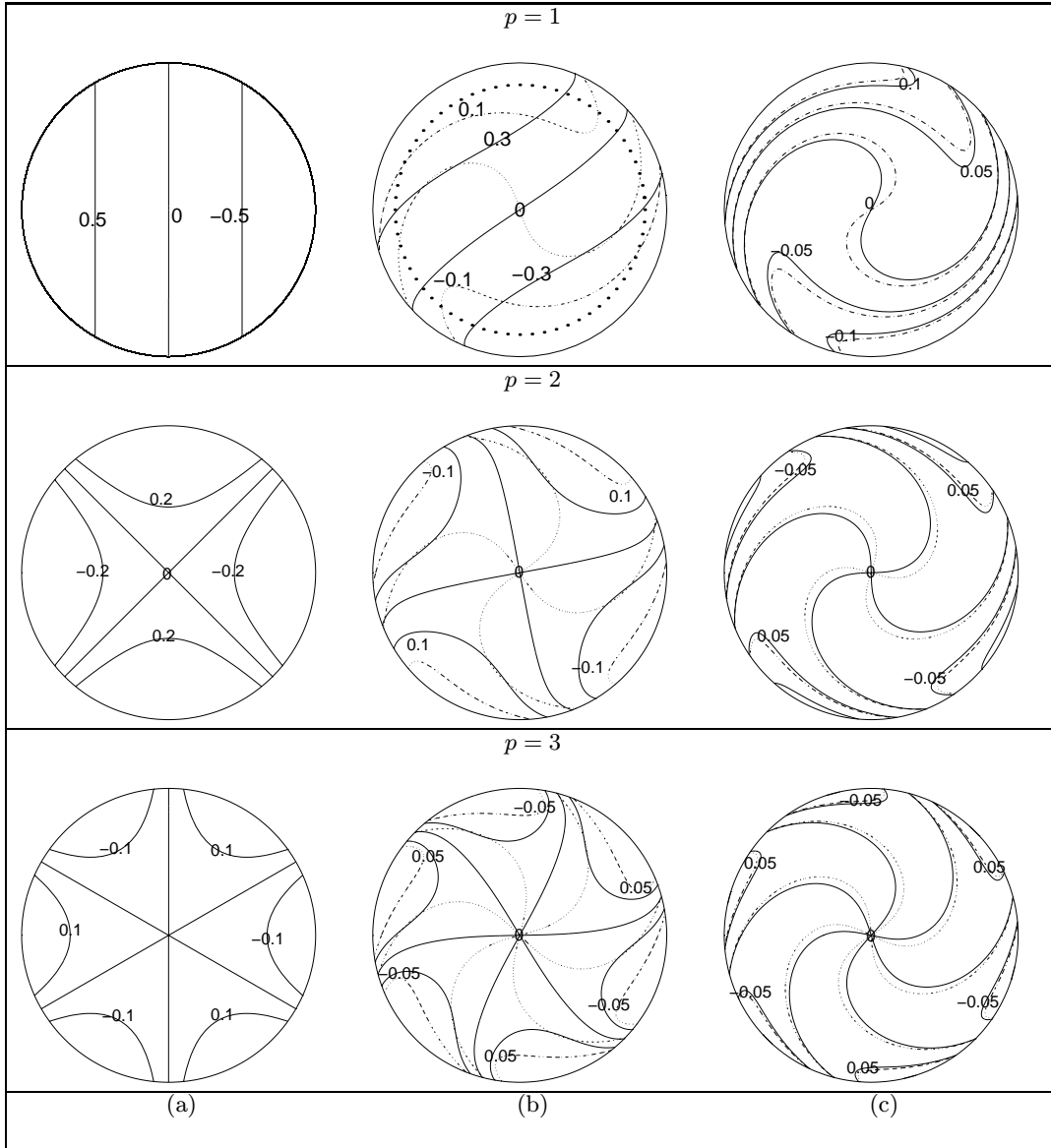


Fig. 7. Lignes de champ magnétique pour $Ha = 30$; a) $R_\omega = 0,01$, b) $R_\omega = 20$ et c) $R_\omega = 40$: les lignes pleines représentent la solution en tenant compte du champ de vitesse ; les ligne brisées la solution pour l'approximation de rotor bloqué.
[Magnetic field lines for $Ha = 30$; a) $R_\omega = 0.01$, b) $R_\omega = 20$ and c) $R_\omega = 40$: the solid lines represents the solution taking into account the velocity field; the dashdot lines represent the solution for the stopped rotor approximation.]

Le résultat de ce système donne :

$$C_1 = \frac{p}{\alpha C} \left(r_s + \frac{p}{\alpha} \right) r_s^{2(p-1)} e^{-\alpha r_s} \quad (18)$$

$$C_2 = \frac{p}{\alpha C} \left(r_s - \frac{p}{\alpha} \right) r_s^{2(p-1)} e^{\alpha r_s} \quad (19)$$

$$C_3 = \frac{2p r_s^{p-1}}{\alpha C} \quad (20)$$

$$C_4 = 0 \quad (21)$$

où $C = -r_s^{p-1} \left(\left(\frac{p}{\alpha} + r_s \right) e^{\alpha(1-r_s)} + \left(\frac{p}{\alpha} - r_s \right) e^{-\alpha(1-r_s)} \right)$.

Les figures 9a, 9b montrent le faible écart existant entre la solution exacte du système d'équations (5 à 9) et celle

obtenue par le modèle d'anneau tournant. Cette constatation nous permet de conclure que la couche magnétique à la paroi décrite dans la section 4 est gouvernée par la couche de Hartmann. Il est remarquable que le champ de vitesse créé par le champ magnétique dicte ensuite le comportement des lignes de ce même champ magnétique.

5.2 Justification du critère de transition : $R_\omega = \frac{Ha}{\sqrt{2}}$

Dans les deux sections suivantes, les variables seront dimensionnelles.

Les résultats de la section 5 montrent que les ordres de grandeurs choisis dans le modèle d'anneau tournant

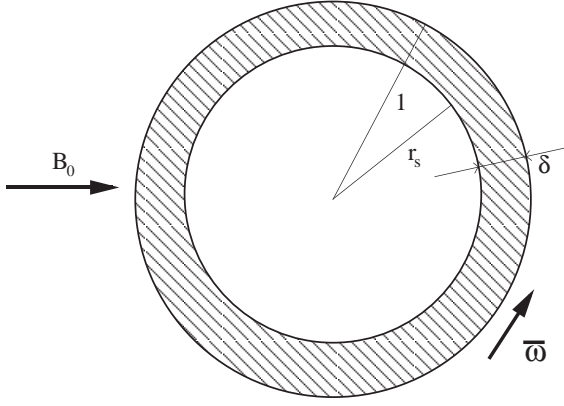


Fig. 8. Schéma du modèle simplifié constitué d'un anneau tournant.

[Scheme of the equivalent rotating ring model.]

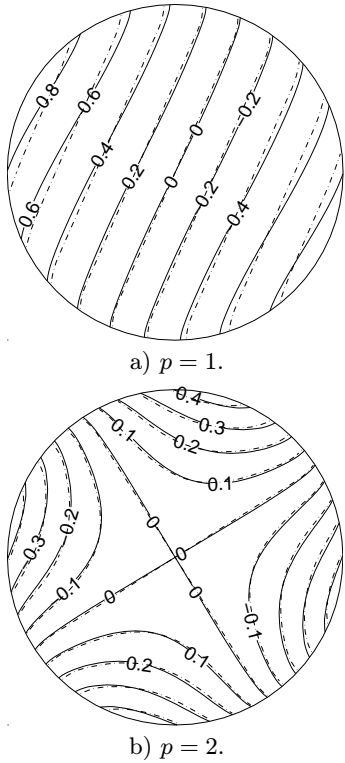


Fig. 9. Lignes de champ magnétique pour $R_\omega = 10$ et $Ha = 30$: les lignes pleines représentent la solution numérique exacte ; les lignes brisées la solution obtenue par le modèle simplifié de la figure 8.

[Magnetic field distribution for $R_\omega = 10$ and $Ha = 30$: the solid lines represent the exact numerical solution; dashdot lines represent the solution obtained with the ring model represented in Figure 8.]

sont assez pertinents. Afin de comprendre la transition en $R_\omega = \frac{Ha}{\sqrt{2}}$, nous allons détailler la construction du paramètre d'écran. Il est calculé comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion, t_d , et d'un temps de convection, t_c , du champ magnétique construits à l'aide de la diffusivité du champ magnétique $\frac{1}{\mu\sigma}$, du rayon du cylindre a et de la vitesse du champ magnétique $\frac{\omega}{p}a$.

$$t_d = \frac{a^2}{\frac{1}{\mu\sigma}} \quad \text{et} \quad t_c = \frac{a}{\frac{\omega}{p}a}, \quad (22)$$

$$\frac{t_d}{t_c} = R_\omega. \quad (23)$$

Ces échelles caractéristiques ont un sens quand la vitesse du fluide est négligeable devant la vitesse du champ car l'ensemble du cylindre contribue à expulser le champ magnétique hors du métal. En revanche quand le nombre de Hartmann est grand devant l'unité seule la couche pariétale a un effet de distorsion du champ magnétique car elle n'est pas au synchronisme. Tant que cet effet de distorsion est modéré, la composante radiale du champ magnétique interagit pleinement avec les courants électriques axiaux pour donner naissance à une force azimuthale motrice. Pour un nombre de Hartmann donné, une augmentation de ω/p a pour effet d'augmenter la vitesse relative entre le champ et le fluide. Le mécanisme de convection qui en résulte affaiblira la composante radiale au profit de la composante azimuthale diminuant ainsi l'intensité des forces de rotation du fluide. Ainsi, pour une valeur infiniment grande de ω/p , la disparition quasi totale de la composante radiale est en cohérence avec l'évolution en R_ω^{-2} discutée dans la section 5.3. Pour Ha fixé, la transition observée sur la figure 5, interviendra lorsque la longueur caractéristique sur laquelle le flux aura été balayé dans la direction azimuthale sera du même ordre de grandeur, δ , que l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique à travers laquelle il pénètre par diffusion. La connaissance de l'épaisseur $\delta \simeq \frac{\sqrt{2}}{Ha} \ln\left(\frac{Ha}{\sqrt{2}}\right)a$ et de la vitesse moyenne de convection azimuthale $\left[\ln\left(\frac{Ha}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \frac{\omega}{p}a$ permet de construire les temps caractéristiques suivants :

$$t_d = \frac{\delta^2}{\frac{1}{\mu\sigma}} \quad \text{et} \quad t_c = \frac{\delta}{\left[\ln\left(\frac{Ha}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \frac{\omega}{p}a} \quad (24)$$

dont l'égalité fournit le critère de transition recherché :

$$R_\omega = \frac{Ha}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

5.3 régime asymptotique : $R_\omega \gg 1$

Pour un grand paramètre d'écran : il est classique d'établir l'épaisseur de peau comme étant : $\delta_e = R_\omega^{-1/2}a$. La conservation du flux impose :

$$B_r \simeq \frac{\delta_e}{a} p B_0.$$

Le théorème d'Ampère fournit la valeur de la densité de courant :

$$j_z \simeq \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{B_0}{\delta_e} - \frac{1}{a} B_0 \frac{\delta_e}{a} p \right\} \simeq \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{B_0}{\delta_e} \right\}.$$

L'équilibre entre les forces visqueuses et électromagnétiques se résume à :

$$\rho\nu\Delta v = (j_z)(B_r).$$

Dans le cas où le paramètre d'écran est grand, les forces électromagnétiques sont confinées dans la couche magnétique pariétale. L'épaisseur de la couche visqueuse est donc prise égale à l'épaisseur de la couche électromagnétique δ_e :

$$\rho\nu \frac{v}{\delta_e^2} \simeq \left(\frac{1}{\mu} \frac{B_0}{\delta_e} \right) \left(p B_0 \frac{\delta_e}{a} \right)$$

d'où le résultat :

$$\frac{v}{\frac{\omega}{p} a} = \frac{\text{Ha}^2}{R_\omega^2}.$$

6 Conclusion

Une étude numérique et analytique des écoulements induits dans une cavité cylindrique par des champs tournants a été réalisée pour des valeurs quelconques du nombre de Hartmann, Ha , et du paramètre d'écran, R_ω . Pour les valeurs élevées du nombre de Hartmann l'écoulement est susceptible d'adopter deux configurations typiques

selon la valeur du paramètre d'écran R_ω :

- pour $R_\omega < \frac{\text{Ha}}{\sqrt{2}}$, l'écoulement comporte une couche de Hartmann pariétale et une zone de cœur tournant au synchronisme. La convection subie par le champ magnétique lors de sa traversée de la couche de Hartmann génère un déphasage angulaire des lignes magnétiques dans le cœur où elle garde une direction constante et n'obéissent qu'à un mécanisme de diffusion pure. Quand R_ω augmente de 0 à $\frac{\text{Ha}}{\sqrt{2}}$, ce déphasage angulaire augmente ;
- pour $R_\omega > \frac{\text{Ha}}{\sqrt{2}}$, l'écoulement est toujours composé d'une couche pariétale et d'une zone de cœur dont la vitesse angulaire suit une loi d'évolution en $\frac{\text{Ha}^2}{R_\omega^2}$. Le champ magnétique dans le cœur subit alors une forte distorsion du fait de sa grande différence de vitesse relative avec le fluide.

Un modèle physique simple, basé sur une prise en compte des échelles caractéristiques pertinentes, est proposé et permet de justifier la valeur de la transition observée pour $R_\omega = \frac{\text{Ha}}{\sqrt{2}}$.

Annexe

La simplicité de mise en œuvre a guidé le choix des schémas de discrétisation. Le faible encombrement mémoire

d'un problème unidirectionnel permet de mailler suffisamment finement pour que l'on évite des schémas de discrétisation sophistiqués qui compliquent la résolution du système linéaire ou pose des problèmes de stabilité.

On définit la discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ par : $r_i = (i-1)\Delta r$ pour $i = 1, \dots, m+1$ avec $\Delta r = 1/m$. La variable discrète f_i (f désigne A_1, A_2 ou v) approche $f(r_i)$. Le système linéaire obtenu par différences finies avec un schéma centré d'ordre 2 des équations (5-7) et des conditions aux limites (Éq. (8, 9)) s'écrit :

$$a_i f_{i-1} + b_i f_i + c_i f_{i+1} = S_i \text{ pour } 2 \leq i \leq m \quad (26)$$

avec :

$$a_i = \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta r} \quad (27)$$

$$b_i = -\frac{2}{\Delta r^2} - \frac{p^2}{r_i^2} \quad (\text{prendre } p = 1 \text{ si } f = v) \quad (28)$$

$$c_i = \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta r} \quad (29)$$

et

$$S_i = -pR_\omega \left(1 - \frac{v_i}{r_i}\right) A_{2_i} \quad \text{si } f = A_1 \quad (30)$$

$$S_i = +pR_\omega \left(1 - \frac{v_i}{r_i}\right) A_{1_i} \quad \text{si } f = A_2 \quad (31)$$

$$S_i = -\frac{p^2 \text{Ha}^2}{2r_i} \left(1 - \frac{v_i}{r_i}\right) (A_{1_i}^2 + A_{2_i}^2) \quad \text{si } f = v. \quad (32)$$

Les conditions limites de type Dirichlet s'écrivent simplement :

$$\text{en } r = 0 : A_{1_1} = A_{2_1} = v_1 = 0,$$

$$\text{en } r = 1 : v_{m+1} = 0.$$

Afin de garder un schéma du deuxième ordre pour les conditions limites de type Neumann pour A_1, A_2 , un point fictif en $m+2$ est créé. La dérivée en $m+1$ s'écrit :

$$\frac{f_{m+2} - f_m}{2\Delta r} = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=1}. \quad (33)$$

En combinant l'équation (26) au point $m+1$ et l'expression discrète de la dérivée (Éq. (33)) on élimine f_{m+2} et on obtient pour A_1 et A_2 :

$$A_{1_m} + \left(-1 - p^2 \frac{\Delta r^2}{2}\right) A_{1_{m+1}} = \Delta r + \frac{\Delta r^2}{2} \times (1 - pR_\omega A_{2_{m+1}}), \quad (34)$$

$$A_{2_m} + \left(-1 - p^2 \frac{\Delta r^2}{2}\right) A_{2_{m+1}} = +p \frac{\Delta r^2}{2} R_\omega A_{1_{m+1}}. \quad (35)$$

Pour une itération, les termes sources de l'équation de f sont évalués à l'aide des valeurs f_{old} (ou bien zéro pour la première itération). Les trois systèmes tridiagonaux sont résolus par l'algorithme de Thomas pour obtenir les valeurs f_{new} . On sous-relaxe la solution en

Tableau 1. Valeurs du coefficient de relaxation.

[Values of the relaxation coefficient]

Valeurs de Ha et R_ω	α pour v	α pour A_1, A_2
Ha = 50, $R_\omega = 0,01$	0,02	0,99
Ha = 1, $R_\omega = 50$	0,99	0,004
Ha = 30, $R_\omega = 40$	0,004	0,99
Ha = 40, $R_\omega = 100$	0,002	0,99

introduisant un coefficient α tel que f_{old} soit remplacé par : $(1 - \alpha) f_{\text{old}} + \alpha f_{\text{new}}$. Des valeurs typiques du coefficient de relaxation utilisé sont reportées dans la table 1.

À la fin de l'itération, on compare en chaque point l'écart $\|f_{\text{old}} - f_{\text{new}}\|$ à une tolérance que nous avons fixée à

10^{-14} (les calculs sont effectués en double précision). Le calcul est stoppé quand l'écart est inférieur à la tolérance.

Bibliographie

1. A. Alemany, R. Moreau. "Écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant", *J. Mécanique* **16**, 625 (1977).
2. E. Dahlberg, "On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid", Technical Report AE-447, Aktiebolaget Atomenergi, Studsvik, Sweden, March 1972.
3. Y.M. Gelfgat, J. Priede. "Mhd flows in a rotating magnetic field", *Magnetohydrodynamics* **31**, 188 (1995).
4. H.K. Moffatt, "On fluid flow induced by a rotating magnetic field", *J. Fluid Mechanics* **22**, 521 (1965).
5. H.K. Moffatt. "Rotation of a liquid metal under the action of a rotating magnetic field", In *Proceedings of the Second Bat-Sheva International Seminar*, Beersheva, 1978 pp 45–62.