

Stabilité d'une nappe liquide plane de métal soumise à un champ magnétique

Philippe MARTY et Laurent MARTIN WITKOWSKI

Laboratoire LEGI, BP n° 53 X, 38041 Grenoble CEDEX, France.

Résumé. On étudie la stabilité d'une nappe plane de métal liquide cisailée sur chacune de ses faces par un écoulement gazeux de vitesse quelconque. L'application d'un champ magnétique modifie peu l'allure des courbes neutres obtenues dans le cas purement hydrodynamique où les instabilités de Kelvin-Helmholtz constituent le mode dominant de déstabilisation. Un champ perpendiculaire atténue le taux de croissance des instabilités, ce qui constitue un résultat classique. Si, par contre, le champ est parallèle à la nappe, le taux de croissance est accru : une justification de ce phénomène surprenant est proposée.

Stability of a plane liquid metal sheet submitted to a magnetic field

Abstract. *The linear stability of a plane liquid sheet of metal flowing between parallel gas streams having different velocities is considered. The presence of a magnetic field only slightly modifies the neutral curves obtained in the pure hydrodynamic regime where the Kelvin-Helmholtz instability is the dominant mechanism of destabilization of the sheet. As expected, the growth rate of the instabilities is decreased when a transverse magnetic field is applied. On the contrary, it is increased when the magnetic field is parallel to the direction of the velocities: a justification is proposed to explain this unusual phenomenon.*

Abridged English Version

I. A recent study of gas atomization for powder production (Gasser *et al.*, 1994) has shown the interest of transforming the liquid metal flow into a conical sheet prior to its destabilization by an externally co-flowing gas stream (*fig. 1*). Nevertheless, for technical reasons, it can be necessary to move downstream the region where the gas stream interacts with the liquid sheet. To do so, the stability of the sheet has to be ensured between its formation at the nozzle outlet and the interaction zone. This paper considers the possibility of using a magnetic field to achieve this task.

Note présentée par René MOREAU.

The weak curvature of the conical sheet allows for the assumption of a plane two-dimensional layer of liquid metal, whose thickness is $2a$, sandwiched between two parallel gas flows (fig. 2). The conductivity of the liquid metal is denoted by σ whereas ρ_m and ρ_g stand for the density of the metal and of the gas, respectively. A constant magnetic field is applied either perpendicularly or in parallel to the flow.

II. Following Chandrasekhar (1961) we apply a linear stability study for the two interfaces in $z = a$ and $z = -a$, and look for solutions of the form of equation (1), where A is real and stands for the small amplitude of the perturbation in $z = +a$ and Φ is complex and then allows the boundary $z = -a$ to have a different amplitude and phase from the other one. The x - and z -components of the Euler equations, together with continuity become equation (2) where $D = \partial/\partial z$ and U_j is the unperturbed velocity in the layer ($j = 0, 1, 2$) and $(u_j, 0, w_j)$ is the velocity perturbation. $\varepsilon_j = 1$ when $j = 0$ and $\varepsilon_j = 0$ when $j = 1$ or 2 . The pressure is denoted by p and g is the gravity. Depending on the direction of B , a braking MHD force [equation (3)] appears in (2 a) or (2 b) where the electric field is absent owing to the axisymmetry of a conical sheet. For a really plane layer, any short-circuiting of the liquid metal layer by an infinitely conducting wall would also cancel the y -derivative of the potential and, consequently, would also give the same result. Using the dimensionless form (8) together with some algebra gives the dispersion equation (10).

III. The case $B = 0$

In this case, the coefficients α_i are real and equation (10) is a simple fourth order polynomial. For the particular case $V_1 = V_2 = 0$, the results agree with those of Hagerty and Shea (1955) and sinuous waves ($\Phi_r = 0$) are found to have a higher growth rate than dilational waves ($\Phi_r = \pi$) (fig. 3). For various We , figure 4 shows the growth rate Ω_i/k as a function of k/We for V_1, V_2 equal to 0 and 4, respectively. The wavenumber k in the neutral regime, $\Omega_i = 0$, satisfies equation (11).

IV. When $B \neq 0$

K is now a complex quantity depending on Ω and equation (10) has been solved using a Newton-Raphson procedure. No significant effect of the magnetic field on the critical velocity has been observed but its influence on the growth rate Ω_i is quite surprising (fig. 5). Whereas a transverse field damps the instability (which is easily foreseeable) a parallel field increases its growth rate. As a matter of fact, this can be attributed to inertia for the following reason: when the field is perpendicular to the sheet, the braking force along Ox will elongate the streamline path which, consequently, will penetrate deeper into the liquid metal layer. This, in turn, increases the role of inertia in the development of the instability. Conversely, a parallel magnetic field shortens the path in the Oz direction and creates a kind of inertial skin effect which confines the flow closer to the interface during the growing process (fig. 6).

I. Des travaux récents (Gasser *et al.*, 1994) visant à améliorer les performances des dispositifs de fabrication de poudres métalliques par atomisation gazeuse ont montré l'intérêt de mettre le métal liquide à pulvériser sous forme d'un voile axisymétrique avant de l'éplucher par des jets gazeux s'écoulant en périphérie externe de la nappe (fig. 1). Des raisons technologiques peuvent amener à souhaiter éloigner le point de rencontre des jets gazeux et du voile. Celui-ci doit donc, au sortir de la busette, rester insensible aux instabilités de Kelvin-Helmholtz et, pour cela, l'utilisation d'un champ magnétique peut être envisagée. Cette situation diffère notablement de celle rencontrée dans les cuves d'électrolyse de l'aluminium où l'on doit étudier la stabilité de l'interface séparant

deux fluides métalliques traversés par un courant électrique imposé (Sneyd, 1985; Moreau *et al.*, 1989). Dans le cas particulier où la vitesse du gaz est identique de part et d'autre du voile, une solution purement hydrodynamique a été proposée par Hagerty et Shea (1955). En présence d'un champ magnétique, la stabilité de l'interface séparant un milieu semi-infini de métal liquide et un fluide isolant a été étudiée par Rivat *et al.* (1991) et a confirmé l'effet stabilisant des forces de Lorentz vis-à-vis de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Ce travail présente l'étude de stabilité linéaire d'un voile dont la courbure est suffisamment faible pour le supposer plan. D'épaisseur $2a$, de conductivité électrique σ , et de masse volumique ρ_m , il s'écoule à la vitesse U_0 entre deux milieux semi-infinis d'un même gaz électriquement isolant, de masse volumique ρ_g , respectivement animés d'une vitesse U_1 et U_2 supposée parallèle à l'interface non perturbée (fig. 2). Deux orientations du champ magnétique seront considérées selon que celui-ci est perpendiculaire ou parallèle à la vitesse U_0 .

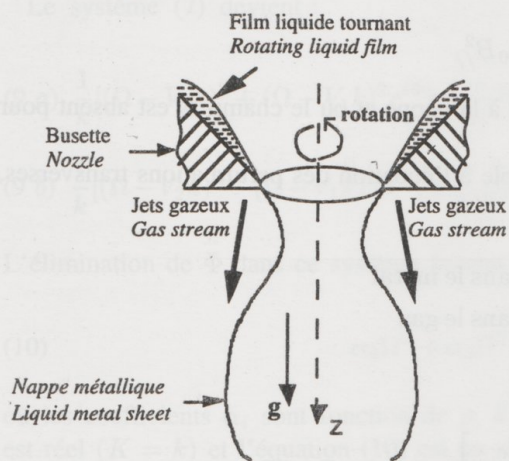


Fig. 1

Fig. 1. - Atomisation gazeuse d'un voile de métal liquide.

Fig. 1. - Gas atomization of a liquid metal sheet.

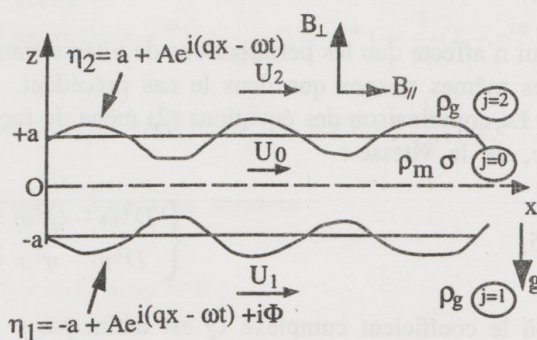


Fig. 2

Fig. 2. - Modèle mathématique et notations.

Fig. 2. - Mathematical model and notations.

II. Afin d'effectuer une analyse de stabilité en modes normaux (Chandrasekhar, 1961), les interfaces situées en $z = +a$ et $-a$ sont perturbées de sorte que leurs équations s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} \eta_1 = -a + Ae^{i(qx - \omega t) + i\Phi} \\ \eta_2 = +a + Ae^{i(qx - \omega t)} \end{cases}$$

où le réel A désigne la faible amplitude de la perturbation de l'interface en $z = +a$, et où le complexe Φ tient compte à la fois du déphasage et du rapport d'amplitude entre les deux interfaces. Les nombres q et ω désignent respectivement le nombre d'onde et la pulsation complexe de l'instabilité. En désignant par $(u_j, 0, w_j)$ ($j = 0, 1, 2$) le champ de vitesse perturbé, les équations d'Euler linéarisées et projetées sur Ox et Oz , ainsi que l'équation de continuité, s'écrivent (sans sommation sur les indices) :

$$\begin{aligned} (2a) \quad & -i\omega\rho_j u_j + iq\rho_j U_j u_j = -iqp_j + \varepsilon_j \cdot F(B_{\perp}) \\ (2b) \quad & -i\omega\rho_j w_j + iq\rho_j U_j w_j = -Dp_j + \varepsilon_j \cdot F(B_{\parallel}) + \rho_j g \\ (2c) \quad & iqu_j + Dw_j = 0 \end{aligned}$$

où $\varepsilon_j = 1$ si $j = 0$, et $\varepsilon_j = 0$ si $j = 1$ ou 2 , et où $D = \partial/\partial z$. p désigne la pression et g la gravité. L'application d'un champ perpendiculaire fait subir au métal liquide une force suivant Ox :

$$(3) \quad F(B_{\perp}) = -\sigma(U_0 + u_0)B_{\perp}^2$$

dont le premier terme traduit l'effet de freinage subit par l'écoulement non perturbé et le second celui exercé sur les perturbations horizontales de vitesse. Remarquons que le champ électrique E n'apparaît pas. Si la nappe est rigoureusement plane, cette hypothèse n'est alors justifiée que si un circuit (ou des parois) de résistance électrique négligeable annulent le gradient de potentiel suivant Oy . Si, par contre, la nappe est axisymétrique, le champ E_y représente alors le champ azimutal dont la valeur est strictement nulle du fait de l'absence de gradient de potentiel dans cette direction ($\partial\varphi/\partial y = 0$). Un champ parallèle à Ox donne naissance, dans le métal, à une force suivant Oz :

$$(4) \quad F(B_{//}) = -\sigma w_0 B_{//}^2$$

qui n'affecte que les perturbations de vitesse transverses à la nappe et où le champ E est absent pour les mêmes raisons que dans le cas précédent.

La combinaison des équations (2) mène de façon simple à l'équation des perturbations transverses, w , de la vitesse :

$$(5) \quad \begin{cases} D^2 w - Q^2 w = 0 & \text{dans le métal} \\ D^2 w - q^2 w = 0 & \text{dans le gaz} \end{cases}$$

où le coefficient complexe Q est défini par :

$$(6) \quad \begin{cases} Q^2 = Q_{//}^2 = q^2 \left[1 + i \frac{\sigma B_{//}^2}{\rho_m (\omega - U_0 q)} \right] & \text{si } B = B_{//} \\ \text{et} \\ Q^2 = Q_{\perp}^2 = q^2 \left[1 + i \frac{\sigma B_{\perp}^2}{\rho_m (\omega - U_0 q)} \right]^{-1} & \text{si } B = B_{\perp} \end{cases}$$

Il est alors aisé d'obtenir u et p en introduisant la solution de w dans les équations (2). La recherche de solutions s'annulant à l'infini, ainsi que la prise en compte du saut de pression aux interfaces, dû à la tension superficielle γ , permet d'obtenir une équation pour chaque interface dont la somme et la différence fournissent le système suivant :

$$(7 a) \quad \frac{\rho_g}{q} [(\omega - U_2 q)^2 + (\omega - U_1 q)^2 e^{i\Phi}] + \frac{\rho_m}{Q} (\omega - U_0 q)^2 \operatorname{th}(Qa)(1 + e^{i\Phi}) = \gamma q^2 (1 + e^{i\Phi}) + \Delta\rho g (1 - e^{i\Phi})$$

$$(7 b) \quad \frac{\rho_g}{q} [(\omega - U_2 q)^2 - (\omega - U_1 q)^2 e^{i\Phi}] + \frac{\rho_m}{Q} (\omega - U_0 q)^2 \operatorname{coth}(Qa)(1 - e^{i\Phi}) = \gamma q^2 (1 - e^{i\Phi}) + \Delta\rho g (1 + e^{i\Phi})$$

où $\Delta\rho = \rho_m - \rho_g$. Lorsque a tend vers l'infini et en l'absence de champ, on remarque que les équations (7) sont celles de l'instabilité hydrodynamique de Kelvin-Helmholtz. Elles peuvent se

Stabilité d'une nappe liquide plane de métal soumise à un champ magnétique

mettre sous forme adimensionnelle en introduisant les nombres suivants :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\rho_m}{\rho_g}, \quad k = qa, \quad \Omega = \frac{\omega a}{U_0}, \quad V_1 = \frac{U_1}{U_0}, \quad V_2 = \frac{U_2}{U_0}, \quad \text{We} = \frac{\rho_g U_0^2 a}{\gamma}, \quad \text{Fr} = \frac{\rho_g U_0^2}{\Delta \rho g a} \\ N = \frac{\sigma B^2 a}{\rho_m U_0}, \\ K = Qa = k \left(1 + i \frac{N}{\Omega - k} \right)^n \text{ avec } n = +1/2 \text{ quand } B = B_{//} \text{ et } n = -1/2 \text{ quand } B = B_{\perp} \end{array} \right.$$

où We, Fr et N désignent respectivement le nombre de Weber, de Froude et le paramètre d'interaction électromagnétique.

Le système (7) devient :

$$(9 a) \quad \frac{1}{k} [(\Omega - V_2 k)^2 + (\Omega - V_1 k)^2 e^{i\Phi}] + \frac{\rho}{K} (\Omega - k)^2 \text{th}(K)(1 + e^{i\Phi}) = \frac{k^2}{\text{We}} (1 + e^{i\Phi}) + \frac{1}{\text{Fr}} (1 - e^{i\Phi})$$

$$(9 b) \quad \frac{1}{k} [(\Omega - V_2 k)^2 - (\Omega - V_1 k)^2 e^{i\Phi}] + \frac{\rho}{K} (\Omega - k)^2 \text{coth}(K)(1 - e^{i\Phi}) = \frac{k^2}{\text{We}} (1 - e^{i\Phi}) + \frac{1}{\text{Fr}} (1 + e^{i\Phi})$$

L'élimination de Φ dans ce système fournit l'équation de dispersion suivante :

$$(10) \quad \alpha_4 \Omega^4 + \alpha_3 \Omega^3 + \alpha_2 \Omega^2 + \alpha_1 \Omega + \alpha_0 = 0$$

où les coefficients α_i sont fonction de ρ , k , K , V_1 , V_2 , We, Fr. Lorsque $N = 0$, le coefficient K est réel ($K = k$) et l'équation (10) est un simple polynôme d'ordre 4. Par contre, si $N \neq 0$, K est un nombre complexe dépendant de Ω et l'équation (10) n'est plus un polynôme. Sa résolution est alors assurée en deux étapes : on cherche d'abord, pour un nombre d'onde k donné, la solution du problème purement hydrodynamique par résolution du polynôme, puis, cette solution sert de valeur initiale à la méthode de Newton-Raphson qui conduit alors à la solution pour $N \neq 0$.

III. En l'absence de champ magnétique

Pour des vitesses de gaz nulles, la figure 3 montre que la vitesse de croissance du mode sinueux ($\Phi_r = 0$) est supérieure à celle du mode variqueux ($\Phi_r = \pi$) : ce résultat, en accord avec ceux d'Hagerty et Shea (1955), a d'ailleurs été vérifié sur des observations expérimentales réalisées sur un voile d'eau dont le mode dominant d'oscillation est le mode sinueux. Lorsque $\rho \gg 1$ les résultats numériques montrent également que la vitesse de ces deux types d'ondes est pratiquement égale à la vitesse de la nappe lorsque k est élevé ce qui se traduit par $\Omega_r \cong k$. Toutefois, celle des ondes sinueuses est légèrement inférieure à celle de la nappe pour les petites valeurs de k . La figure 4 illustre, pour diverses valeurs de We, le taux de croissance Ω_i/We en fonction de k/We quand les vitesses V_1 et V_2 sont respectivement égales à 0 et 4. L'état neutre ($\Omega_i = 0$) est atteint pour des nombres d'ondes k tel que :

$$(11) \quad (\Delta V)_c^2 \text{We} = k$$

où le saut de vitesse ΔV_c est la différence entre la vitesse du gaz le plus rapide et celle de la nappe. L'existence du point P d'intersection de toutes les courbes n'a pas pour l'instant été expliquée.

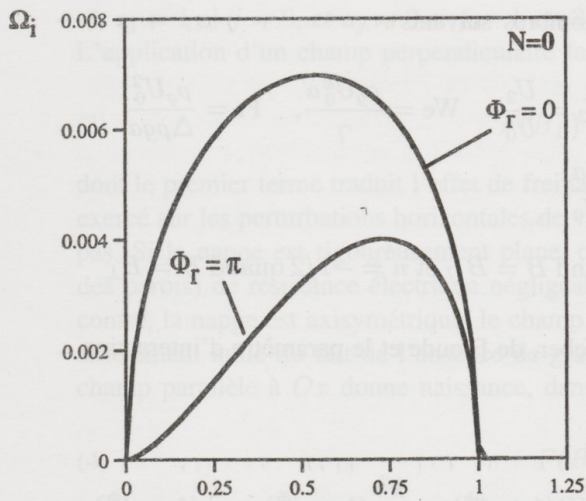


Fig. 3

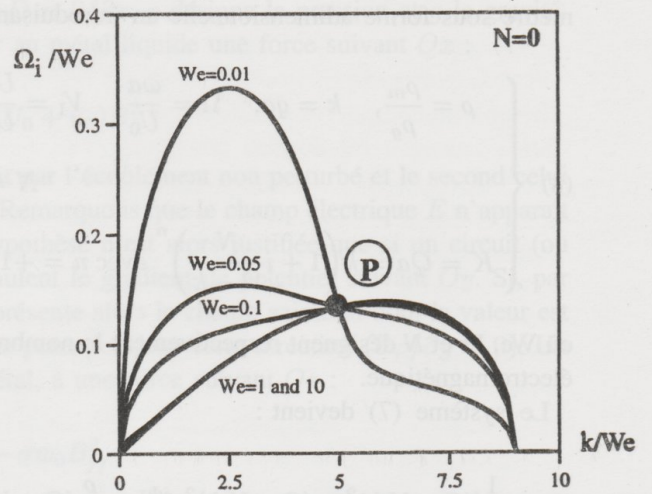


Fig. 4

Fig. 3. - Taux de croissance des ondes sinueuses ($\Phi_r = 0$) et variqueuses ($\Phi_r = \pi$) pour $V_1 = V_2 = 0, N = 0, Fr \gg 1, \rho = 5\,600, We = 1$.

Fig. 3. - Growth rate of the sinuous and dilatational waves.

Fig. 4. - Évolution du taux de croissance Ω_i avec le nombre de Weber pour : $V_1 = 0, V_2 = 4, \rho = 5\,600, Fr \gg 1$ et $N = 0$.

Fig. 4. - Ω_i vs. k for different Weber numbers and $N = 0$.

IV. En présence d'un champ magnétique

La résolution de l'équation (10) dans le cas le plus général ne fait pas apparaître d'influence notable de B sur la vitesse critique. Ceci peut aisément s'interpréter si l'on considère l'état neutre $\Omega_i = 0$ comme résultant d'un équilibre entre forces de pression créées par l'écoulement et forces de tension superficielle : on constate alors que le champ B ne peut en aucun cas agir sur cet équilibre. De même, le taux de croissance des ondes sinueuses ($\Phi_r = 0$) est encore trouvé supérieur à celui des modes variqueux ($\Phi_r = \pi$) et leur célérité Ω_r/k est toujours égale à la vitesse de la nappe. On observe par contre une influence notable de B sur le taux de croissance Ω_i de l'instabilité. Le cas particulier d'une nappe s'écoulant dans un milieu gazeux au repos à l'infini ($V_1 = V_2 = 0$) pour un nombre de Froude infini facilite l'interprétation de ce phénomène. En se limitant au cas où le nombre d'onde le plus amplifié k_{\max} est grand devant l'unité (l'épaisseur a du film est alors grande devant la longueur d'onde associée), les deux interfaces sont alors découplées et satisfont la même équation :

$$(12) \quad \frac{\Omega^2}{k} + \frac{\rho}{K}(\Omega - k)^2 = \frac{k^2}{We}$$

Pour $N \gg 1$, l'approximation $\Omega_r \sim k$ simplifie l'expression de K [équation (8)] qui s'écrit :

$$(13) \quad K \approx k \left[\frac{N}{\Omega_i} \right]^n$$

où n prend les valeurs définies en (8).

Stabilité d'une nappe liquide plane de métal soumise à un champ magnétique

L'équation (12) permet alors de déduire l'expression du taux de croissance maximum pour un champ transverse :

$$(14) \quad \Omega_{i \max} = 0,28 \left(\frac{We^4}{N\rho^2} (\Delta V)^{12} \right)^{1/3}$$

ou pour un champ parallèle :

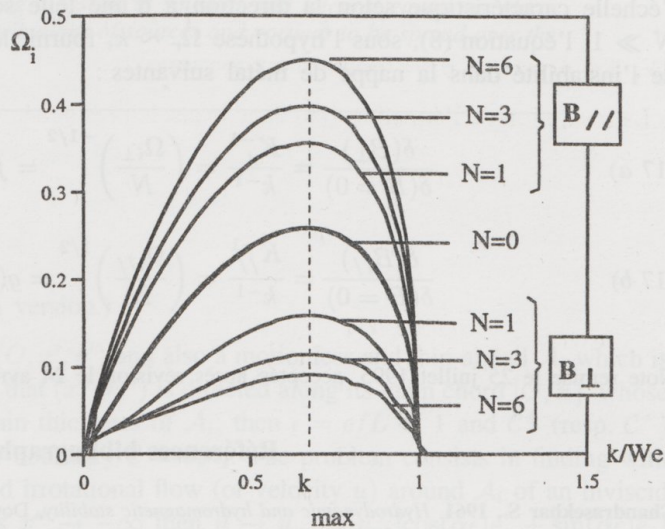
$$(15) \quad \Omega_{i \max} = 0,465 \left(\frac{NWe^4}{\rho^2} (\Delta V)^{12} \right)^{1/5}$$

Dans les deux cas, le nombre d'onde k_{\max} d'amplification maximum est égal à :

$$(16) \quad k_{\max} = \frac{2}{3} We (\Delta V)^2$$

Les équations (14) et (15) montrent le rôle fondamental de l'orientation du champ magnétique sur le taux de croissance de l'instabilité. Un champ magnétique perpendiculaire freine le développement de l'instabilité, ce qui constitue un résultat classique en MHD. Un champ parallèle, par contre, accélère son développement. La figure 5 illustre ce résultat. Pour N variant de 0 à 6, k_{\max} vérifie l'équation (16).

Fig. 5. - Influence de la direction de B sur Ω_i pour $V_1 = V_2 = 0$, $\rho = 5\ 600$, $We = 50$ et $Fr \gg 1$.
 Fig. 5. - Influence of the direction of the magnetic field on Ω_i



Le tracé des lignes de courant hydrodynamique pour $N = 0$ et 10 aide à l'interprétation de ce phénomène (fig. 6). Lorsque le champ est perpendiculaire à l'interface, les lignes de courant hydrodynamiques ont tendance à s'allonger suivant la direction Oz du fait de leur difficulté à croiser la direction du champ et la masse de métal mise en mouvement par l'instabilité s'en trouve augmentée, diminuant ainsi Ω_i . Inversement, un champ parallèle a tendance à favoriser le rebouclage des lignes de courant hydrodynamiques suivant la direction Ox et, ainsi, à diminuer la masse de fluide concernée par le développement de l'instabilité. La forme des solutions en $\exp(Kz)$ issues de

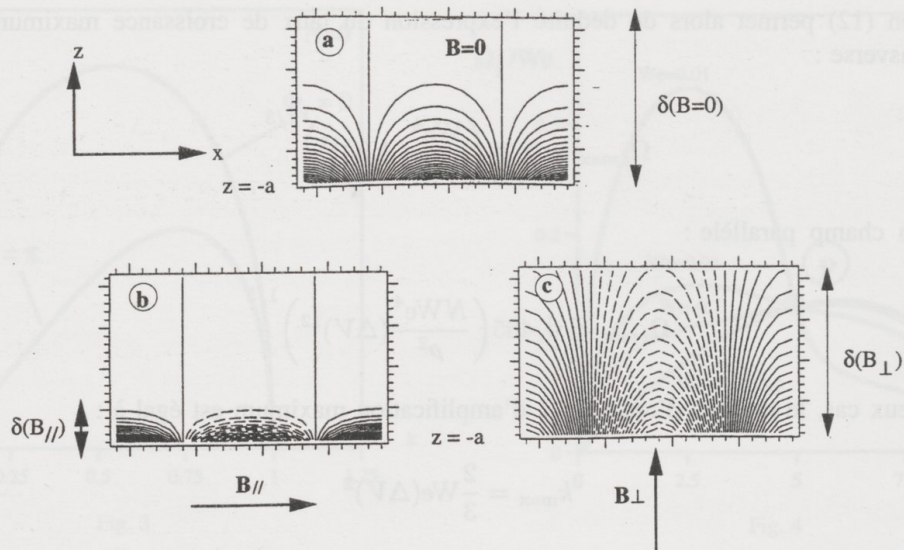


Fig. 6. - Effet de la direction de B sur la profondeur de pénétration des lignes de courant dans le métal.
 a) $B = 0$; b) champ parallèle et $N = 10$; c) champ perpendiculaire et $N = 10$.

Fig. 6. - Effect of the direction of B on the streamline penetration depth.
 a) $B = 0$; b) B parallel and $N = 10$; c) B perpendicular and $N = 10$.

l'équation (5) mise sous forme adimensionnelle permet également de prévoir ce résultat : en effet, l'échelle caractéristique selon la direction z d'une telle solution vaut K^{-1} de sorte que, lorsque $N \gg 1$, l'équation (8), sous l'hypothèse $\Omega_r \sim k$, fournit les échelles de longueur δ de pénétration de l'instabilité dans la nappe de métal suivantes :

$$(17 a) \quad \frac{\delta(B_{\perp})}{\delta(B=0)} = \frac{K_{\perp}^{-1}}{k^{-1}} = \left(\frac{\Omega_{i\perp}}{N} \right)^{-1/2} = f(We, \rho, \Delta V) N^{2/3}$$

$$(17 b) \quad \frac{\delta(B_{//})}{\delta(B=0)} = \frac{K_{//}^{-1}}{k^{-1}} = \left(\frac{\Omega_{i//}}{N} \right)^{1/2} = g(We, \rho, \Delta V) N^{-2/5}$$

Note remise le 25 juillet 1995, acceptée après révision le 24 avril 1996.

Références bibliographiques

- Chandrasekhar S., 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, New York.
 Gasser J. C. et Marty Ph., 1994. Liquid sheet modelling in a swirl atomiser, *Eur. J. of Mech., B/Fluids*, 13, n° 6.
 Hagerty W. et Shea J., 1955. A study of the stability of plane liquid sheets, *J. Appl. Mech.*, 22, 1955.
 Moreau R., Pigny S. et Maslowe S. A., 1989. Amplitude evolution of interfacial waves in aluminium reduction cells, in *Liquid Metal Magnetohydrodynamics*, Kluwer Acad. Publ., Moreau R. et Lielpetris éd.
 Rivat R., Etay J. et Garnier M., 1991. Stabilisation of a surface wave by a magnetic field, *Eur. J. of Mech., B/Fluids*, 10, n° 5.
 Sneyd A. D., 1985. Stability of fluid layers carrying a normal electric current, *J. Fluid Mech.*, 156.