



Thème 1 : L'algèbre de Boole et les fonctions combinatoires

L'Algèbre de Boole

1. Démontrez les propriétés suivantes :

1. $a + ab = a(1 + b) = a$
2. $a + \bar{a}b = a + ab + \bar{a}b = a + b(a + \bar{a}) = a + b.1 = a + b$
3. $ac + \bar{a}b + bc = ac + \bar{a}b = ac + \bar{a}b + bc.1 = ac + \bar{a}b + bc.(a + \bar{a})$
 $= ac + \bar{a}b + bc.a + bc.\bar{a} = ac(1 + b) + \bar{a}b(1 + c) = ac + \bar{a}b$

2. Démontrez les relations suivantes :

1. $AB + ACD + \bar{B}D = AB + \bar{B}D + ACD(B + \bar{B}) = AB + ACDB + ACDB + \bar{B}D$
 $= AB(1 + CD) + \bar{B}D(AC + 1) = AB + \bar{B}D$
2. $ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BCD = AB(C + \bar{C}) + \bar{A}BCD = AB + \bar{A}BCD$
 $= A(B + \bar{B}(CD)) = A(B + CD) = AB + ACD$
3. $ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC + ABC = ABC + \bar{A}BC + ABC + \bar{A}BC + ABC + ABC$
 $= BC(A + \bar{A}) + AC(B + \bar{B}) + AB(C + \bar{C}) = BC + AC + AB$
4. $\overline{AB} + \overline{AB} = \overline{AB}.\overline{AB} = (\bar{A} + B).(A + \bar{A}) = \bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{B} = AB + \bar{A}\bar{B}$

3. Donnez la forme simplifiée des fonctions suivantes en utilisant les méthodes algébriques :

1. $X = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc = \bar{a}c(b + \bar{b}) + ac(b + \bar{b}) = c(a + \bar{a}) = c$
2. $Y = (\bar{a} + b)(b + \bar{c})(\bar{a} + c).\bar{a} = (\bar{a}\bar{a} + \bar{a}b)(b + \bar{c})(\bar{a} + c) = (\bar{a} + \bar{a}b)(b + \bar{c})(\bar{a} + c)$
 $= \bar{a}(1 + b)(b + \bar{c})(\bar{a} + c) = \bar{a}(b + \bar{c})(\bar{a} + c) = (\bar{a}\bar{a} + \bar{a}c)(b + \bar{c})(\bar{a} + c) = \bar{a}(1 + c)(b + \bar{c})$
 $= \bar{a}(b + \bar{c})$
3. $Z = ac + \bar{a}b + bc = ac + \bar{a}b$
4. $F(A, B, C) = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}BC + \bar{A}BC = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}C(\bar{B} + B)$
 $= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}C = ABC + AB\bar{C} + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}C$
 $= ABC + AB\bar{C} + AC(B + \bar{B}) + \bar{A}C = ABC + AB\bar{C} + C(A + \bar{A}) = AB(C + \bar{C}) + C = AB + C$