

# Asymptotique du transport libre cinétique avec condition de Maxwell

Armand Bernou  
LJLL, Sorbonne Université  
En collaboration avec Nicolas  
Fournier (LPSM)

24 Juin 2021  
Journées de probabilités 2021

# Convergence vers l'équilibre du transport libre

- 1 Modèle et résultats précédents
  - Équation du transport libre
  - Conditions au bord
  - Contexte et résultats précédents
- 2 Résultat et cadre probabiliste
- 3 Résultats numériques

## Modèle

Modèle physique : gaz à très faible densité de particules (gaz de Knudsen). On néglige les interactions entre particules.

## Modèle

Modèle physique : gaz à très faible densité de particules (gaz de Knudsen). On néglige les interactions entre particules.

La densité de probabilité  $f(t, x, v)$  de trouver une particule en position  $x \in \Omega$  (domaine spatial), au temps  $t \geq 0$ , avec vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , vérifie l'EDP du transport libre

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

## Modèle

Modèle physique : gaz à très faible densité de particules (gaz de Knudsen). On néglige les interactions entre particules.

La densité de probabilité  $f(t, x, v)$  de trouver une particule en position  $x \in \Omega$  (domaine spatial), au temps  $t \geq 0$ , avec vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , vérifie l'EDP du transport libre

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

C'est l'équation du transport libre (cinétique) dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On la complète avec

- une donnée initiale  $f_0(\cdot, \cdot)$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^d$ ;
- des conditions au bord  $\partial\Omega$  du domaine spatial.

## Une vue du transport libre

## Conditions au bord

Ce choix a un impact crucial sur le modèle. Premier choix possible : la réflexion spéculaire (billard).

## Conditions au bord

Ce choix a un impact crucial sur le modèle. Premier choix possible : la réflexion spéculaire (billard).

### Réflexion spéculaire

Soit  $x \in \partial\Omega$ ,  $n_x$  le vecteur normal unitaire pointant vers  $\Omega$  à  $x$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$  tel que  $v \cdot n_x < 0$ , alors la vitesse rentrante (après la réflexion) est

$$\eta_x(v) = v - 2(v \cdot n_x)n_x.$$



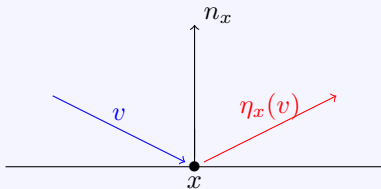
## Conditions au bord

Ce choix a un impact crucial sur le modèle. Premier choix possible : la réflexion spéculaire (billard).

### Réflexion spéculaire

Soit  $x \in \partial\Omega$ ,  $n_x$  le vecteur normal unitaire pointant vers  $\Omega$  à  $x$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$  tel que  $v \cdot n_x < 0$ , alors la vitesse rentrante (après la réflexion) est

$$\eta_x(v) = v - 2(v \cdot n_x)n_x.$$



## Limites de la réflexion spéculaire

Modèle trop simple qui retranscrit mal certains phénomènes physiques.

## Limites de la réflexion spéculaire

Modèle trop simple qui retranscrit mal certains phénomènes physiques.

Exemple : pas de tension de surface exercée par le gaz sur le bord du domaine dans les directions tangentielles, ce qui est contraire aux observations.

## Limites de la réflexion spéculaire

Modèle trop simple qui retranscrit mal certains phénomènes physiques.

Exemple : pas de tension de surface exercée par le gaz sur le bord du domaine dans les directions tangentielles, ce qui est contraire aux observations.

Une clé de compréhension : le mur est lui-même composé de plusieurs couches de molécules, possiblement espacées.

## Réflexion diffuse

Une solution, due à Maxwell lui-même est d'utiliser à la place (au moins en partie) la **réflexion diffuse**.

## Réflexion diffuse

Une solution, due à Maxwell lui-même est d'utiliser à la place (au moins en partie) la **réflexion diffuse**.

### Réflexion diffuse

Soit  $\Sigma := \partial\Omega \times \mathbb{R}^d$ . Au bord, la densité  $f$  satisfait, pour  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$ , avec  $v \cdot n_x > 0$ ,

$$f(t, x, v) = cM(v)\widetilde{\gamma}_+ f(t, x),$$

où  $c$  est une constant de normalisation et  $\widetilde{\gamma}_+ f$  est le flux, donné par

$$\widetilde{\gamma}_+ f(t, x) = \int_{\{v' \cdot n_x < 0\}} f(t, x, v') |v' \cdot n_x| dv'.$$

## Choix de $M$

Le cas le plus classique est la **Maxwellienne de bord** :

$$M(v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}.$$

## Choix de $M$

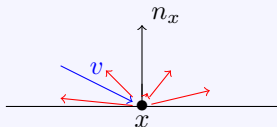
Le cas le plus classique est la **Maxwellienne de bord** :

$$M(v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}.$$

D'autres choix sont possibles :

- 1 Avec une dépendance spatiale,  $c(x)M(x, v) = c(x)e^{-\frac{|v|^2}{2\theta(x)}}$  où  $\theta(x)$  est la température en  $x \in \partial\Omega$ ,  $c(x)$  constante.
- 2 Billards stochastiques :  $M$  conserve l'énergie, pas de symétrie radiale.

Ici, on va supposer  $M$  à symétrie radiale, continue au voisinage de 0 avec  $\int_1^\infty M(v)dv > 0$ .





## La condition de Maxwell

La combinaison convexe des deux réflexions est plus pertinente physiquement.

### Condition de Maxwell

Pour  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$  avec  $v \cdot n_x > 0$ ,

$$f(t, x, v) = (1 - \alpha(x))f(t, x, \eta_x(v)) + \alpha(x)cM(v)\widetilde{\gamma}_+ f(t, x),$$

avec  $\alpha(x) \in [0, 1]$  le **coefficient d'accommodation** en  $x \in \partial\Omega$ .

## La condition de Maxwell

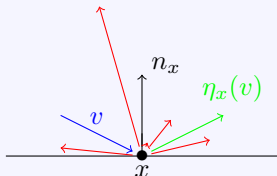
La combinaison convexe des deux réflexions est plus pertinente physiquement.

### Condition de Maxwell

Pour  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$  avec  $v \cdot n_x > 0$ ,

$$f(t, x, v) = (1 - \alpha(x))f(t, x, \eta_x(v)) + \alpha(x)cM(v)\widetilde{\gamma}_+ f(t, x),$$

avec  $\alpha(x) \in [0, 1]$  le **coefficient d'accommodation** en  $x \in \partial\Omega$ .



## Hypothèses et résultat qualitatif

On considère le transport libre cinétique avec condition de Maxwell au bord, température constante et  $d \geq 2$ . On suppose que  $\Omega$  est un domaine borné  $C^2$ , de volume 1, et on pose  $G := \Omega \times \mathbb{R}^d$ . On considère  $f_0 \in L^1(G)$ .

## Hypothèses et résultat qualitatif

On considère le transport libre cinétique avec condition de Maxwell au bord, température constante et  $d \geq 2$ . On suppose que  $\Omega$  est un domaine borné  $C^2$ , de volume 1, et on pose  $G := \Omega \times \mathbb{R}^d$ . On considère  $f_0 \in L^1(G)$ .

Le problème est bien posé (Arkeryd-Cercignani 93) : l'équation admet une solution unique  $f$  telle que  $f(t, \cdot, \cdot) \in L^1(G)$  pour tout  $t \geq 0$ . On peut travailler avec des mesures, mais on perd l'unicité. On veut comprendre le comportement de  $f$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

## Hypothèses et résultat qualitatif

On considère le transport libre cinétique avec condition de Maxwell au bord, température constante et  $d \geq 2$ . On suppose que  $\Omega$  est un domaine borné  $C^2$ , de volume 1, et on pose  $G := \Omega \times \mathbb{R}^d$ . On considère  $f_0 \in L^1(G)$ .

Le problème est bien posé (Arkeryd-Cercignani 93) : l'équation admet une solution unique  $f$  telle que  $f(t, \cdot, \cdot) \in L^1(G)$  pour tout  $t \geq 0$ . On peut travailler avec des mesures, mais on perd l'unicité. On veut comprendre le comportement de  $f$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Une hypothèse clé :  $\forall x \in \partial\Omega, \alpha(x) \geq \alpha_0$  pour un  $\alpha_0 > 0$ . Si  $\alpha \equiv 0$ , il n'y a pas d'équilibre. Entre les deux, c'est compliqué.

## Absence d'équilibre dans le cas purement spéculaire

## Convergence qualitative vers l'équilibre

Entropie naturelle : soit  $W(t) = \int_G f \ln\left(\frac{f}{M}\right) dv dx \geq 0$ , alors

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq 0.$$

C'est une forme de Théorème H pour la transport libre.

## Convergence qualitative vers l'équilibre

Entropie naturelle : soit  $W(t) = \int_G f \ln\left(\frac{f}{M}\right) dv dx \geq 0$ , alors

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq 0.$$

C'est une forme de Théorème H pour la transport libre.

De plus, si  $f(t, x, v) = M(v)$  pour tout  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times G$ ,  $W(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

On peut en fait montrer (Arkeryd-Nouri 94, LMKR 20) qu'en partant d'un  $f_0 \in L^1(G)$  de masse 1,  $f(t, \cdot, \cdot)$  converge vers

$$f_\infty(x, v) = M(v).$$



## Convergence qualitative vers l'équilibre

Entropie naturelle : soit  $W(t) = \int_G f \ln\left(\frac{f}{M}\right) dv dx \geq 0$ , alors

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq 0.$$

C'est une forme de Théorème H pour la transport libre.

De plus, si  $f(t, x, v) = M(v)$  pour tout  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times G$ ,  $W(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

On peut en fait montrer (Arkeryd-Nouri 94, LMKR 20) qu'en partant d'un  $f_0 \in L^1(G)$  de masse 1,  $f(t, \cdot, \cdot)$  converge vers

$$f_\infty(x, v) = M(v).$$

Quel est le taux de convergence correspondant en norme  $L^1$  ?  
Vitesses faibles qui persistent longtemps  $\rightarrow$  on s'attend à une convergence **sous-exponentielle**.

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;
- 2 Aoki-Golse (2011) : borne supérieure en  $\frac{1}{t}$  pour tout  $d$  (application du théorème de renouvellement de Feller);

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;
- 2 Aoki-Golse (2011) : borne supérieure en  $\frac{1}{t}$  pour tout  $d$  (application du théorème de renouvellement de Feller);
- 3 Kuo-Liu-Tsai et Kuo (2013-2014-2015): taux en  $\frac{1}{t^d} \rightarrow$  description stochastique du système et obtention d'une LGN.

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;
- 2 Aoki-Golse (2011) : borne supérieure en  $\frac{1}{t}$  pour tout  $d$  (application du théorème de renouvellement de Feller);
- 3 Kuo-Liu-Tsai et Kuo (2013-2014-2015): taux en  $\frac{1}{t^d} \rightarrow$  description stochastique du système et obtention d'une LGN.

Toutes ces méthodes reposent fortement sur la symétrie du domaine.

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;
- 2 Aoki-Golse (2011) : borne supérieure en  $\frac{1}{t}$  pour tout  $d$  (application du théorème de renouvellement de Feller);
- 3 Kuo-Liu-Tsai et Kuo (2013-2014-2015): taux en  $\frac{1}{t^d} \rightarrow$  description stochastique du système et obtention d'une LGN.

Toutes ces méthodes reposent fortement sur la symétrie du domaine. Récemment, Lods and Mokhtar-Kharroubi (2020) ont obtenu un taux en  $\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}$  sans hypothèse de symétrie.

## Résultats connus pour ce problème ( $M$ Maxwellienne)

En norme  $L^1$ , avec  $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$  (symétrie radiale du domaine) :

- 1 Tsuji-Aoki-Golse (2010) : taux de convergence en  $\frac{1}{t^d}$  obtenu numériquement à partir de l'entropie  $W$ ;
- 2 Aoki-Golse (2011) : borne supérieure en  $\frac{1}{t}$  pour tout  $d$  (application du théorème de renouvellement de Feller);
- 3 Kuo-Liu-Tsai et Kuo (2013-2014-2015): taux en  $\frac{1}{t^d} \rightarrow$  description stochastique du système et obtention d'une LGN.

Toutes ces méthodes reposent fortement sur la symétrie du domaine. Récemment, Lods and Mokhtar-Kharroubi (2020) ont obtenu un taux en  $\frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}$  sans hypothèse de symétrie.

Un résultat purement déterministe (adaptation d'un théorème de Harris) : B. 2020  $\rightarrow$  optimal dans le cas où  $M$  est la Maxwellienne de bord, possiblement dépendante de  $x$ , sans hypothèse de symétrie.



## Illustration de la convergence : cas non radial

# Convergence vers l'équilibre du transport libre

1 Modèle et résultats précédents

2 Résultat et cadre probabiliste

- Résultat
- Construction d'un processus adapté
- Couplage probabiliste

3 Résultats numériques

## Résultat principal

### Théorème (B., Fournier 2020)

Soit  $\Omega$  un domaine borné,  $C^2$ ,  $G := \Omega \times \mathbb{R}^d$ . Soit  $f_0 \in L^1(G)$ , on note  $f_t \in L^1(G)$  l'unique solution en  $t \geq 0$ . Si  $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est str. croissante avec  $r(x+y) \lesssim r(x) + r(y)$ , et

$$\int_G r\left(\frac{1}{|v|}\right) f_0(x, v) \, dv dx + \int_G r\left(\frac{1}{|v|}\right) M(v) \, dv dx < \infty,$$

alors, pour tout  $t \geq 0$ , pour une constante  $C > 0$ ,

$$\|f_t - f_\infty\|_{L^1(G)} \leq \frac{C}{r(t)}.$$

## Quelques remarques

- 1 Le théorème est essentiellement pensé pour le cas  $r(x) = (x + 1)^\gamma$  pour un  $\gamma > 0$ . Si  $M$  est la Maxwellienne de bord et  $f_0$  bornée, on peut choisir, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma = d - \epsilon$ .

## Quelques remarques

- 1 Le théorème est essentiellement pensé pour le cas  $r(x) = (x + 1)^\gamma$  pour un  $\gamma > 0$ . Si  $M$  est la Maxwellienne de bord et  $f_0$  bornée, on peut choisir, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma = d - \epsilon$ .
- 2 Il raffine la dépendance en  $f_0$  du résultat.

## Quelques remarques

- 1 Le théorème est essentiellement pensé pour le cas  $r(x) = (x + 1)^\gamma$  pour un  $\gamma > 0$ . Si  $M$  est la Maxwellienne de bord et  $f_0$  bornée, on peut choisir, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma = d - \epsilon$ .
- 2 Il raffine la dépendance en  $f_0$  du résultat.
- 3 On peut adapter le théorème pour traiter le cadre mesure (plutôt que  $L^1$ ), en perdant uniquement l'unicité de  $f_t$ .

## Quelques remarques

- 1 Le théorème est essentiellement pensé pour le cas  $r(x) = (x + 1)^\gamma$  pour un  $\gamma > 0$ . Si  $M$  est la Maxwellienne de bord et  $f_0$  bornée, on peut choisir, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma = d - \epsilon$ .
- 2 Il raffine la dépendance en  $f_0$  du résultat.
- 3 On peut adapter le théorème pour traiter le cadre mesure (plutôt que  $L^1$ ), en perdant uniquement l'unicité de  $f_t$ .
- 4 Le résultat est également plus précis en la dépendance en  $M$ , et permet en particulier de regarder autre chose que la Maxwellienne de bord.

## Construction d'une solution : préliminaires

Idée : pour tout  $g \in L^1(G)$ , on va construire un processus  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  dont la loi est solution du problème (EDP) + (Condition de bord) avec donnée initiale  $g$ .



## Construction d'une solution : préliminaires

Idée : pour tout  $g \in L^1(G)$ , on va construire un processus  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  dont la loi est solution du problème (EDP) + (Condition de bord) avec donnée initiale  $g$ .

Pour cela, deux fonctions utiles :

$$\zeta(x, v) := \begin{cases} \inf\{t > 0, x + tv \in \partial\Omega\}, & x \in \Omega \text{ ou } x \in \partial\Omega, v \cdot n_x > 0, \\ 0 & x \in \partial\Omega, v \cdot n_x \leq 0, \end{cases}$$

$$q(x, v) := x + \zeta(x, v)v.$$

## Construction d'une solution : préliminaires

Idée : pour tout  $g \in L^1(G)$ , on va construire un processus  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  dont la loi est solution du problème (EDP) + (Condition de bord) avec donnée initiale  $g$ .

Pour cela, deux fonctions utiles :

$$\zeta(x, v) := \begin{cases} \inf\{t > 0, x + tv \in \partial\Omega\}, & x \in \Omega \text{ ou } x \in \partial\Omega, v \cdot n_x > 0, \\ 0 & x \in \partial\Omega, v \cdot n_x \leq 0, \end{cases}$$

$$q(x, v) := x + \zeta(x, v)v.$$

Si l'on part au temps 0 en position  $x$  avec vitesse  $v$ ,  $\zeta(x, v)$  est le temps auquel on touche le bord,  $q(x, v)$  l'endroit où cette collision se produit.

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .
- Pour  $t \in (T_0, T_1)$ , on pose  $X_t = X_0 + tV_0$ ,  $V_t = V_0$ .

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .
- Pour  $t \in (T_0, T_1)$ , on pose  $X_t = X_0 + tV_0$ ,  $V_t = V_0$ .
- On pose  $X_{T_1} = q(X_0, V_0)$ ,  $V_{T_1} = R_1 \vartheta(X_{T_1}, \Theta_1)$ . On pose aussi  $T_2 = T_1 + \zeta(X_{T_1}, V_{T_1})$ .

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .
- Pour  $t \in (T_0, T_1)$ , on pose  $X_t = X_0 + tV_0$ ,  $V_t = V_0$ .
- On pose  $X_{T_1} = q(X_0, V_0)$ ,  $V_{T_1} = R_1 \vartheta(X_{T_1}, \Theta_1)$ . On pose aussi  $T_2 = T_1 + \zeta(X_{T_1}, V_{T_1})$ .
- ...

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .
- Pour  $t \in (T_0, T_1)$ , on pose  $X_t = X_0 + tV_0$ ,  $V_t = V_0$ .
- On pose  $X_{T_1} = q(X_0, V_0)$ ,  $V_{T_1} = R_1 \vartheta(X_{T_1}, \Theta_1)$ . On pose aussi  $T_2 = T_1 + \zeta(X_{T_1}, V_{T_1})$ .
- ...

On utilise plusieurs suites i.i.d. de v.a.

- 1  $(R_i)_{i \geq 1}$  avec  $R_1$  v.a. sur  $\mathbb{R}_+$  (norme de la vitesse sortante);
- 2  $(\Theta_i)_{i \geq 1}$  v.a. sur  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, \pi]^{d-2}$  telle que, pour  $x \in \partial\Omega$ ,

$$R_1 \vartheta(x, \Theta_1) \sim M(v) |v \cdot n_x| \mathbf{1}_{\{v \cdot n_x > 0\}}.$$

## Construction du processus

Pour construire  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  (cas  $\alpha \equiv 1$ ),

- On tire  $(X_0, V_0) \sim g$ , on pose  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = T_0 + \zeta(X_0, V_0)$ .
- Pour  $t \in (T_0, T_1)$ , on pose  $X_t = X_0 + tV_0$ ,  $V_t = V_0$ .
- On pose  $X_{T_1} = q(X_0, V_0)$ ,  $V_{T_1} = R_1 \vartheta(X_{T_1}, \Theta_1)$ . On pose aussi  $T_2 = T_1 + \zeta(X_{T_1}, V_{T_1})$ .
- ...

On utilise plusieurs suites i.i.d. de v.a.

- 1  $(R_i)_{i \geq 1}$  avec  $R_1$  v.a. sur  $\mathbb{R}_+$  (norme de la vitesse sortante);
- 2  $(\Theta_i)_{i \geq 1}$  v.a. sur  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, \pi]^{d-2}$  telle que, pour  $x \in \partial\Omega$ ,

$$R_1 \vartheta(x, \Theta_1) \sim M(v) |v \cdot n_x| \mathbf{1}_{\{v \cdot n_x > 0\}}.$$

→ construction pour  $\alpha \equiv 1$ . Si l'on veut ajouter une composante spéculaire, on lance une pièce pondérée à chaque  $T_i$ ,  $i \geq 1$ , en affectant la réflexion spéculaire si elle donne face.



Soit  $K$  l'opérateur donné, pour  $\phi$  suffisamment régulier,  
 $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^d$  avec  $v \cdot n_x > 0$ , par

$$K\phi(t, x, v) = \alpha(x)cM(v)\widetilde{\gamma_+}\phi(t, x) + (1 - \alpha(x))\phi(t, x, \eta_x(v)).$$

Soit  $K$  l'opérateur donné, pour  $\phi$  suffisamment régulier,  
 $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^d$  avec  $v \cdot n_x > 0$ , par

$$K\phi(t, x, v) = \alpha(x)cM(v)\widetilde{\gamma}_+\phi(t, x) + (1 - \alpha(x))\phi(t, x, \eta_x(v)).$$

## Proposition

*Soit  $f_0 \in L^1(G)$  et  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  donné par la construction précédente avec donnée initiale  $f_0$ . Alors, la loi de  $(t, X_t, V_t)_{t \geq 0}$  admet une densité  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+ \times G$  et  $f$  est une solution faible de l'EDP avec condition de bord, i.e.*

- 1** pour tout  $T > 0$ ,  $\int_0^T \int_G f(t, x, v) dx dv dt < \infty$ ;

Soit  $K$  l'opérateur donné, pour  $\phi$  suffisamment régulier,  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^d$  avec  $v \cdot n_x > 0$ , par

$$K\phi(t, x, v) = \alpha(x)cM(v)\widetilde{\gamma}_+\phi(t, x) + (1 - \alpha(x))\phi(t, x, \eta_x(v)).$$

## Proposition

Soit  $f_0 \in L^1(G)$  et  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  donné par la construction précédente avec donnée initiale  $f_0$ . Alors, la loi de  $(t, X_t, V_t)_{t \geq 0}$  admet une densité  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+ \times G$  et  $f$  est une solution faible de l'EDP avec condition de bord, i.e.

- 1 pour tout  $T > 0$ ,  $\int_0^T \int_G f(t, x, v) dx dv dt < \infty$ ;
- 2 il existe un couple de mesures de Radon positives  $\rho_{\pm}$  sur  $\Sigma_{\pm} := (0, \infty) \times \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^d, \pm(v \cdot n_x) > 0\}$  tel que

$$\rho_+ = K\rho_- \text{ sur } \Sigma_+ \text{ au sens des distributions}$$

et tel que pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times G)$  avec  $\phi = 0$  sur  $(0, \infty) \times \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^d, (v \cdot n_x) = 0\}$ ,

$$\langle f, (\partial_t + v \cdot \nabla_x)\phi \rangle_{(0, \infty) \times G} = -\langle f_0, \phi(0, \cdot, \cdot) \rangle_G + \langle \rho_+, \phi \rangle_{\Sigma_+} - \langle \rho_-, \phi \rangle_{\Sigma_-}.$$

## Couplage stochastique

On va considérer  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  donné par la construction précédente avec donnée initiale  $f_0$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  donné par la même construction pour  $g = f_\infty$ . Par invariance,  $\forall t \geq 0, (\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) \sim f_\infty$ .

## Couplage stochastique

On va considérer  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  donné par la construction précédente avec donnée initiale  $f_0$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  donné par la même construction pour  $g = f_\infty$ . Par invariance,  $\forall t \geq 0, (\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) \sim f_\infty$ .

On introduit le **temps de couplage**

$$\tau := \inf\{t \geq 0, (X_{t+s}, V_{t+s})_{s \geq 0} = (\tilde{X}_{t+s}, \tilde{V}_{t+s})_{s \geq 0}\}.$$

L'objectif est de corréler les v.a. apparaissant dans les définition de  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  pour obtenir  $\mathbb{E}[r(\tau)] < \infty$ .

## Couplage stochastique

On va considérer  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  donné par la construction précédente avec donnée initiale  $f_0$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  donné par la même construction pour  $g = f_\infty$ . Par invariance,  $\forall t \geq 0, (\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) \sim f_\infty$ .

On introduit le **temps de couplage**

$$\tau := \inf\{t \geq 0, (X_{t+s}, V_{t+s})_{s \geq 0} = (\tilde{X}_{t+s}, \tilde{V}_{t+s})_{s \geq 0}\}.$$

L'objectif est de corréler les v.a. apparaissant dans les définition de  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  pour obtenir  $\mathbb{E}[r(\tau)] < \infty$ .

Par propriétés de la distance en variation totale : si  $(X_t, V_t) \sim f_t$  est solution au temps  $t$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) \sim f_\infty$ , alors, par Markov,

$$\begin{aligned} \|f_t - f_\infty\|_{TV} &= \inf_{(X,V) \sim f_t, (\tilde{X}, \tilde{V}) \sim f_\infty} \mathbb{P}((X, V) \neq (\tilde{X}, \tilde{V})) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau > t) \leq \frac{\mathbb{E}[r(\tau)]}{r(t)}. \end{aligned}$$

## Contrôle du temps de couplage

C'est LE point délicat : comment corrélérer les suites  $(R_i, \Theta_i)_{i \geq 1}$  et  $(\tilde{R}_i, \tilde{\Theta}_i)_{i \geq 1}$  qui apparaissent dans les constructions de  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  ?

## Contrôle du temps de couplage

C'est LE point délicat : comment corréler les suites  $(R_i, \Theta_i)_{i \geq 1}$  et  $(\tilde{R}_i, \tilde{\Theta}_i)_{i \geq 1}$  qui apparaissent dans les constructions de  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  ?

Pour simplifier, supposons  $\Omega$  strictement convexe. Alors si  $(X_t, V_{t-}) \in \Sigma_-, \tilde{X}_t \in \Omega$  et  $|\tilde{V}_t| \geq 1$ , on pose  $t' = t + \zeta(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) > t$ .



## Contrôle du temps de couplage

C'est LE point délicat : comment corrélérer les suites  $(R_i, \Theta_i)_{i \geq 1}$  et  $(\tilde{R}_i, \tilde{\Theta}_i)_{i \geq 1}$  qui apparaissent dans les constructions de  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  ?

Pour simplifier, supposons  $\Omega$  strictement convexe. Alors si  $(X_t, V_{t-}) \in \Sigma_-$ ,  $\tilde{X}_t \in \Omega$  et  $|\tilde{V}_t| \geq 1$ , on pose  $t' = t + \zeta(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) > t$ . On peut choisir (couplage maximal)  $(R, \Theta)$  dans la construction de  $V_t$  et  $(\tilde{R}, \tilde{\Theta})$  pour la construction de  $\tilde{V}_{t'}$  tels que, pour  $T = t + \zeta(X_t, V_t)$ ,

$$\mathbb{P}\left((X_{T+s}, V_{T+s})_{s \geq 0} = (\tilde{X}_{T+s}, \tilde{V}_{T+s})_{s \geq 0}\right) \geq c,$$

pour un  $c > 0$  uniforme.

## Une vue du mécanisme de corrélation

## Une esquisse du contrôle de $\tau$

Grossièrement, pour  $T_0 = 0$ , et  $T_{k+1} = \inf\{t > T_k, X_t \in \partial\Omega\}$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut donc introduire une sous-suite  $(T_{i_k})_{k \geq 1}$  telle que  $T_{i_0} = 0$  et, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$T_{i_{k+1}} = \inf \left\{ T_j > T_{i_k}, \tilde{X}_{T_j} \in \Omega, |\tilde{V}_{T_j}| \geq 1 \right\},$$

## Une esquisse du contrôle de $\tau$

Grossièrement, pour  $T_0 = 0$ , et  $T_{k+1} = \inf\{t > T_k, X_t \in \partial\Omega\}$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut donc introduire une sous-suite  $(T_{i_k})_{k \geq 1}$  telle que  $T_{i_0} = 0$  et, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$T_{i_{k+1}} = \inf \left\{ T_j > T_{i_k}, \tilde{X}_{T_j} \in \Omega, |\tilde{V}_{T_j}| \geq 1 \right\},$$

puis une variable aléatoire géométrique  $G \sim \mathcal{G}(c)$  et obtenir la majoration suivante

## Une esquisse du contrôle de $\tau$

Grossièrement, pour  $T_0 = 0$ , et  $T_{k+1} = \inf\{t > T_k, X_t \in \partial\Omega\}$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut donc introduire une sous-suite  $(T_{i_k})_{k \geq 1}$  telle que  $T_{i_0} = 0$  et, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$T_{i_{k+1}} = \inf \left\{ T_j > T_{i_k}, \tilde{X}_{T_j} \in \Omega, |\tilde{V}_{T_j}| \geq 1 \right\},$$

puis une variable aléatoire géométrique  $G \sim \mathcal{G}(c)$  et obtenir la majoration suivante

$$\tau \leq T_{i_{G+1}}.$$

## Une esquisse du contrôle de $\tau$

Grossièrement, pour  $T_0 = 0$ , et  $T_{k+1} = \inf\{t > T_k, X_t \in \partial\Omega\}$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut donc introduire une sous-suite  $(T_{i_k})_{k \geq 1}$  telle que  $T_{i_0} = 0$  et, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$T_{i_{k+1}} = \inf \left\{ T_j > T_{i_k}, \tilde{X}_{T_j} \in \Omega, |\tilde{V}_{T_j}| \geq 1 \right\},$$

puis une variable aléatoire géométrique  $G \sim \mathcal{G}(c)$  et obtenir la majoration suivante

$$\tau \leq T_{i_{G+1}}.$$

Comment contrôler les intervalles  $T_{i_{k+1}} - T_{i_k}$  ? On a, sachant  $\mathcal{F}_{T_{i_k}}$ ,

$$T_{i_{k+1}} - T_{i_k} \lesssim \frac{d(\Omega)}{|V_{T_{i_k}}|} + \frac{d(\Omega)}{|\tilde{V}_{T_{i_k}}|} + 1,$$

où  $d(\Omega)$  est le diamètre de  $\Omega$ . Premier terme pour contrôler les intervalles  $T_{i_{k+1}} - T_{i_k}$ , second terme nécessaire pour que la suite  $(T_{i_k})_{k \geq 1}$  n'explose pas.

## Contrôle de $\tau$ II

Quelles sont les distributions possibles pour  $V_{T_i}$  et  $\tilde{V}_{T_i}$  ?

- 1 Soit  $V \sim \int_{\Omega} f_0 dx$  (cas  $i = 0$  pour  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  notamment);
- 2 soit  $V_{T_i} \sim M(v) | v \cdot n_{X_{T_i}} | \mathbf{1}_{\{v \cdot n_{X_{T_i}} > 0\}}$ ;
- 3 soit  $V \sim M(v)$  (cas  $i = 0$  pour  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  notamment).

## Contrôle de $\tau$ II

Quelles sont les distributions possibles pour  $V_{T_i}$  et  $\tilde{V}_{T_i}$  ?

- 1 Soit  $V \sim \int_{\Omega} f_0 dx$  (cas  $i = 0$  pour  $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$  notamment);
- 2 soit  $V_{T_i} \sim M(v) | v \cdot n_{X_{T_i}} | \mathbf{1}_{\{v \cdot n_{X_{T_i}} > 0\}}$ ;
- 3 soit  $V \sim M(v)$  (cas  $i = 0$  pour  $(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t)_{t \geq 0}$  notamment).

Pour conclure, on utilise (un peu de travail) l'inégalité précédente sur  $T_{i_{k+1}} - T_{i_k}$ , les contrôles sur les  $\frac{1}{|V|}$  donnés par les hypothèses sur  $r, f_0$  et  $M$ , et le fait que  $r(x + y) \lesssim r(x) + r(y)$  :

$$\mathbb{E}[r(\tau)] \lesssim \mathbb{E}[r(T_{i_{G+1}} - T_{i_G})] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{G-1} r(T_{i_{k+1}} - T_{i_k})\right] < \infty.$$



## Le cas non-convexe

Précédemment, on s'est placé en  $t > 0$  avec  $X_t \in \partial\Omega$ ,  $\tilde{X}_t \in \Omega$  et  $|\tilde{V}_t| \geq 1$  pour obtenir une minoration uniforme.

## Le cas non-convexe

Précédemment, on s'est placé en  $t > 0$  avec  $X_t \in \partial\Omega$ ,  $\tilde{X}_t \in \Omega$  et  $|\tilde{V}_t| \geq 1$  pour obtenir une minoration uniforme.

Dans le cas non-convexe, il faut être plus précis sur les positions de  $X_t$  et  $\tilde{X}_t$ . On va ainsi identifier une région  $F \subset \partial\Omega$  tel que si  $X_t \in F$ ,  $\tilde{X}_t \in \Omega$ ,  $|\tilde{V}_t| \geq 1$  avec  $q(\tilde{X}_t, \tilde{V}_t) \in F$ , alors on peut à nouveau corrélérer  $(R, \Theta)$  intervenant dans la définition de  $V_t$  et  $(\tilde{R}, \tilde{\Theta})$  intervenant dans la définition de  $\tilde{V}_t$  pour que, en posant  $T = \zeta(X_t, V_t)$ ,

$$\mathbb{P}\left((X_{T+s}, V_{T+s})_{s \geq 0} = (\tilde{X}_{T+s}, \tilde{V}_{T+s})_{s \geq 0}\right) \geq c,$$

avec un  $c > 0$  uniforme sur  $F$ . À partir de cette adaptation, la stratégie est similaire.

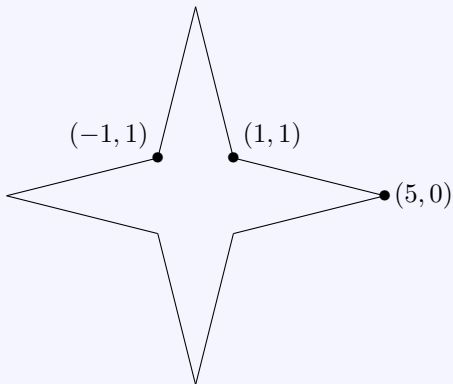
# Convergence vers l'équilibre du transport libre

- 1 Modèle et résultats précédents
- 2 Résultat et cadre probabiliste
- 3 Résultats numériques**

## Une autre approche numérique

La construction du processus précédent permet d'approcher la simulation du problème à l'aide d'un système de particules plutôt que de l'entropie comme dans Tsuji et al.

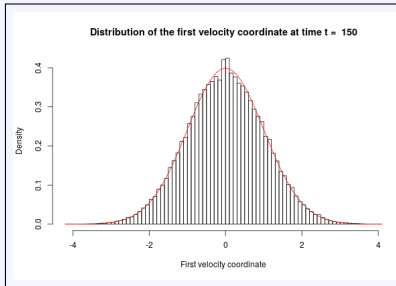
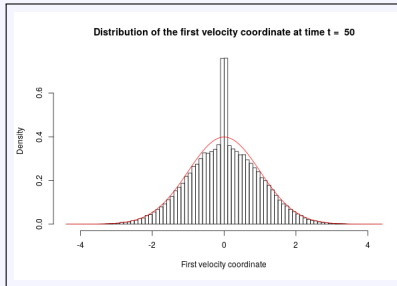
On va se placer à nouveau dans le domaine étoilé suivant (2D).



## Comportement qualitatif

On considère une distribution initiale uniforme en espace, avec la loi  $\mathcal{N}(0, 0.01I_2)$  pour les vitesses.

Paramètres :  $10^6$  particules,  $\alpha \equiv 1$  (réflexion diffuse),  $M$  Maxwellienne de bord.



## Simulation numérique de la variation totale

Un problème pratique important la distance en variation totale est difficile à estimer numériquement.

## Simulation numérique de la variation totale

Un problème pratique important la distance en variation totale est difficile à estimer numériquement.

On va utiliser la propriété suivante : si  $\mu, \nu$  sont deux mesures sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ ,

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sup_{\phi: E \rightarrow [-1,1]} \left| \int \phi d\mu - \int \phi d\nu \right|.$$

## Simulation numérique de la variation totale

Un problème pratique important la distance en variation totale est difficile à estimer numériquement.

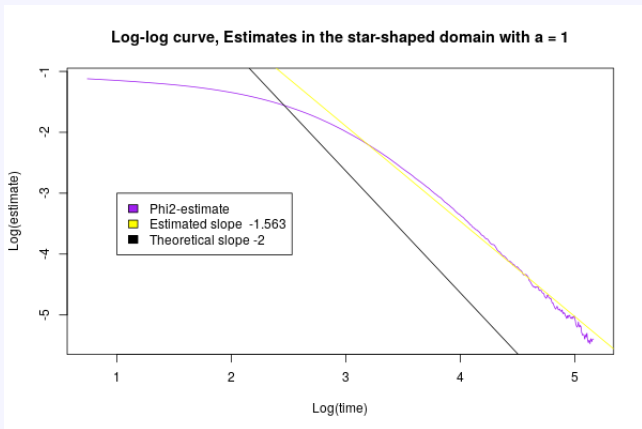
On va utiliser la propriété suivante : si  $\mu, \nu$  sont deux mesures sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ ,

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sup_{\phi: E \rightarrow [-1,1]} \left| \int \phi d\mu - \int \phi d\nu \right|.$$

On peut donc approcher la variation totale en testant les mesures contre une fonction  $\phi$ . On présente des estimations correspondant aux choix  $\phi(x, v) = |x|^4 + |v|^2$  et  $\phi_2(x, v) = \sqrt{|x|} + \sqrt{|v|}$ .



## Cas de la Maxwellienne de bord



Courbe log-log  $\rightarrow$  on a bien un taux polynomial, comme attendu, mais sa valeur est loin de la prédiction théorique (faiblesse du choix de la fonction test).

## Modification de la loi au bord

On peut, à la place de

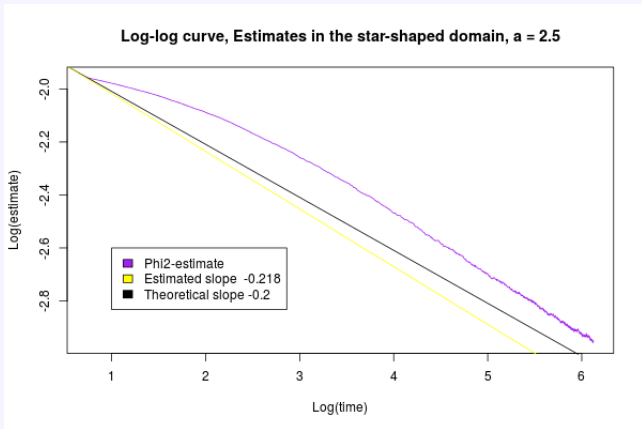
$$M(v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{2\pi}, \quad v \in \mathbb{R}^2,$$

considérer une modification qui augmente/diminue la concentration autour de 0:

$$M_a(v) \propto e^{-\frac{|v|^{\frac{2}{a}}}{2}} |v|^{\frac{3}{a}-3}, \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad a \in (0, 3).$$

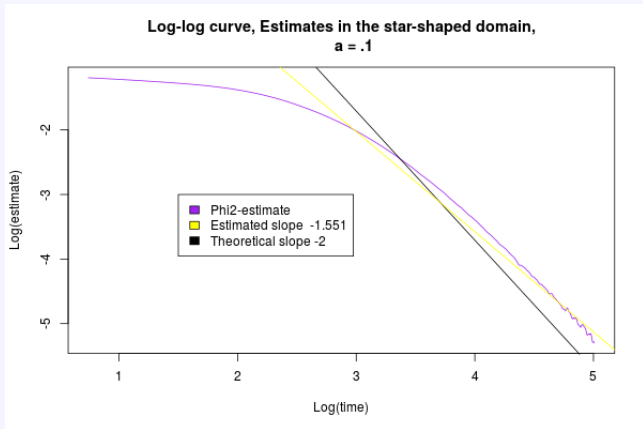
Ce nouveau choix modifie le taux de convergence (si le  $f_0$  est bien choisi). En particulier, avec la donnée initiale mentionnée précédemment, on attend un taux d'exposant  $\frac{3}{a} - 1$  pour  $a \in ]1, 3[$  (le problème est un peu plus compliqué pour  $a < 1$ ).

Un exemple : le cas  $a = 2.5$ .



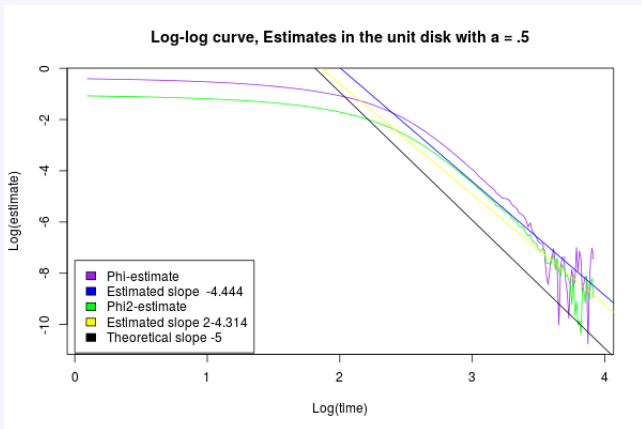
Déviaton claire par rapport au cas  $a = 1$  ! À nouveau, différence entre le taux observé et le taux théorique.

## Dépendance en $f_0$ : $a = 0.1$



Avec la donnée initiale précédente  $\rightarrow$  exposant maximal 2. Comme prévu, pas de déviation significative par rapport au cas  $a = 1$ .

Et correction pour  $f_0$  bien choisie,  $a = .5$



Si on prend  $V_0 = 0.1V$  où  $V \sim M_a$  (équilibre pour  $a = 0.5$  mais avec température 0.01), on voit bien la modification de la convergence.

- 1 Étude de NESS à l'aide du processus construit ici (cf Evans-Menegaki 20).

- 1 Étude de NESS à l'aide du processus construit ici (cf Evans-Menegaki 20).
- 2 Le cas où  $\alpha$  peut s'annuler ponctuellement.

- 1 Étude de NESS à l'aide du processus construit ici (cf Evans-Menegaki 20).
- 2 Le cas où  $\alpha$  peut s'annuler ponctuellement.
- 3 Une autre façon d'introduire de la corrélation : la condition de Cercignani-Lampis (utilité du cadre probabiliste pour les équations collisionnelles).



## Références



K. Aoki and F. Golse, *On the Speed of Approach to Equilibrium for a Collisionless Gas*, Kinetic and Related Models **4** (2011), no. 1, 87–107.



A. Bernou, *Long-Time Behavior of Kinetic Equations with Boundary Effects*, Ph.D. thesis, December 2020, Available online at <https://www.ljll.math.upmc.fr/bernou/>.



A. Bernou and N. Fournier, *A Coupling Approach for the Convergence to Equilibrium for a Collisionless Gas*, 2021, Annals of Applied Probability, in press.



H.-W. Kuo, T.-P. Liu, and L.-C. Tsai, *Free Molecular Flow with Boundary Effect*, Communications in Mathematical Physics **318** (2013), no. 2, 375–409 (en).



T. Tsuji, K. Aoki, and F. Golse, *Relaxation of a Free-Molecular Gas to Equilibrium Caused by Interaction with Vessel Wall*, Journal of Statistical Physics **140** (2010), no. 3, 518–543 (en).

Merci pour votre attention !