Bornes inférieures pour la kernelization (méthodes et outils)

Rémi Watrigant
sous la direction de Christophe Paul

12 mai 2011

Sommaire

Introduction

Problème paramétré

Un **problème paramétré** est un couple (Q, κ) où $Q \subseteq \Sigma^*$ est un problème et $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction calculable en temps polynomial.
Une instance de (Q, κ) est un couple $(x, \kappa(x)) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$. Le second membre est appelé le *paramètre*.

Noyau

Un **noyau** pour un problème (Q, κ) est une fonction $\mathcal{N} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable en temps polynomial telle que pour tout $x \in \Sigma^*$:

- $\mathcal{N}(x) \in Q \Leftrightarrow x \in Q$
- $|\mathcal{N}(x)| \leq f(\kappa(x))$ pour une fonction f quelconque.

$\Rightarrow$ On cherche des noyaux de taille f la plus petite possible
Par exemple : $f \equiv$ polynome

Sommaire

OU-compositions

Algorithme de OU-distillation : problème classique

$$\boxed{x_1} \;\; \cdots\; \boxed{x_t} \xrightarrow{\text{temps polynômial}} \boxed{x^*}$$

$\exists i$ tel que $x_i \in Q \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in Q$

$$|x^*| \leq poly(\max_{i=1..t} |x_i|)$$

OU-compositions

Algorithme de OU-distillation : problème classique

$$\boxed{x_1} \; \cdots \; \boxed{x_t} \xrightarrow{\text{temps polynômial}} \boxed{x^*}$$

$$\exists i \text{ tel que } x_i \in Q \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x^* \in Q \\ |x^*| \leq poly(\max_{i=1..t} |x_i|) \end{array}$$

Théorème [Fortnow,Santhanam,2008])

Si un problème NP-complet admet un algorithme de OU-distillation, alors $PH = \Sigma_p^3$.

OU-compositions

Algorithme de OU-distillation : problème classique

$$\boxed{x_1} \;\cdots\; \boxed{x_t} \xrightarrow{\text{temps polynômial}} \boxed{x^*}$$

$$\exists i \text{ tel que } x_i \in Q \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in Q$$

$$|x^*| \leq poly(\max_{i=1..t} |x_i|)$$

Algorithme de OU-composition : problème paramétré

$$\boxed{x_1} \;\cdots\; \boxed{x_t} \xrightarrow{\text{polynômial en } \sum_{i=1}^{t} |x_i| + k} \boxed{x^*}$$

$$\kappa(x_i) = \kappa(x_j) = k \; \forall i, j$$

$$\exists i \text{ tel que } x_i \in Q \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in Q$$

$$\kappa(x^*) \leq poly(k)$$

OU-compositions

Algorithme de OU-composition : problème paramétré

$$\boxed{x_1} \quad \cdots \quad \boxed{x_t} \xrightarrow{\text{polynômial en } \sum_{i=1}^{t} |x_i| + k} \boxed{x^*}$$

$\kappa(x_i) = \kappa(x_j) = k \ \forall i, j$

$\exists i$ tel que $x_i \in Q \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in Q$

$\kappa(x^*) \leq poly(k)$

Théorème [Bodlaender & al. 2009]

Noyau polynômial pour (Q, κ)

+

Algorithme de OU-composition pour (Q, κ)

$\rightarrow$ Algorithme de OU-distillation pour la version non paramétrée de (Q, κ)

Transformations paramétrées polynomiales

Théorème [Bodlaender, Thomassé, Yeo, 2008]

$$\boxed{(Q_1, \kappa_1)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{(Q_2, \kappa_2)}$$

Transformations paramétrées polynomiales

Théorème [Bodlaender, Thomassé, Yeo, 2008]

$$\kappa_2(\mathcal{F}(x)) \leq poly(\kappa_1(x))$$

$$x \in Q_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(x) \in Q_2$$

$$\boxed{(Q_1, \kappa_1)} \xrightarrow[\text{temps polynômial}]{\mathcal{F}} \boxed{(Q_2, \kappa_2)}$$

Transformations paramétrées polynomiales

Théorème [Bodlaender, Thomassé, Yeo, 2008]

$$\kappa_2(\mathcal{F}(x)) \leq poly(\kappa_1(x))$$

$$x \in Q_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(x) \in Q_2$$

$$\boxed{(Q_1, \kappa_1)} \xrightarrow[\text{temps polynômial}]{\mathcal{F}} \boxed{(Q_2, \kappa_2)}$$

NP-difficile NP

Théorème :

Noyau polynômial $\Leftarrow$ Noyau polynômial

Cross-composition de A vers (Q, κ)

instances équivalentes

temps polynômial

$$\boxed{x_1} \; \cdots \; \boxed{x_t} \longrightarrow \boxed{x^*}$$

$\exists i$ tel que $x_i \in A \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in Q$

$$\kappa(x^*) \leq \left(\max_{i=1..t} |x_i| + \log t\right)^{O(1)}$$

Relation d'équivalence polynomiale

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Σ^* est une relation d'équivalence polynomiale si :

- il existe un algorithme polynomial décidant si deux instances sont équivalentes
- pour un ensemble d'instances S, $\mathcal{R}$ partitionne les éléments de S en moins de $\max_{x \in S} |x|^{O(1)}$ classes.

Cross-composition de A vers (Q, κ)

instances équivalentes

temps polynômial

$$\boxed{x_1} \; \cdots \; \boxed{x_t} \longrightarrow \boxed{x^*}$$

$\exists i$ tel que $x_i \in A$ $\Leftrightarrow$ $x^* \in Q$

$$\kappa(x^*) \leq (\max_{i=1..t} |x_i| + \log t)^{O(1)}$$

Théorème [Bodlaender & al. 2010]

Cross-composition de A (NP-complet) vers (Q, κ)

+

Noyau polynômial pour (Q, κ)

→ Algorithme de distillation de A vers la version non paramétrée de (Q, κ)

Remarques

$$\boxed{\text{OU-composition de } (Q, \kappa)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Cross-composition de } \tilde{Q} \\ \text{vers } (Q, \kappa)\end{array}}$$

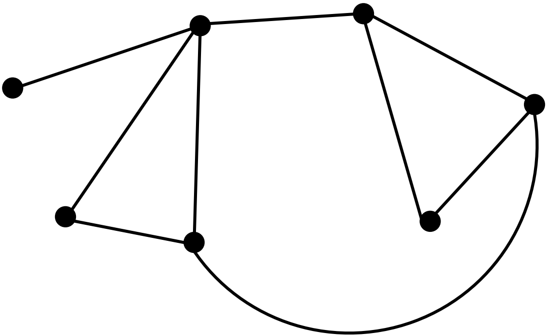
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{OU-composition de } (Q_1, \kappa_1) \\ + \\ (Q_1, \kappa_1) \leq_{PTP} (Q_2, \kappa_2)\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Cross-composition de } \tilde{Q}_1 \\ \text{vers } (Q_2, \kappa_2)\end{array}}$$

Sommaire

Dominating set

DOMINATING SET

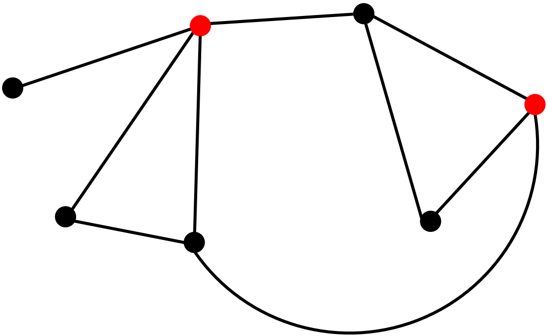
entrée : Un graphe $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
question : Existe-t-il $D \subseteq V$ avec $|D| \leq k$ et tel que pour tout $x \in V$, soit $x \in D$, soit x est adjacent à un sommet $y \in D$?



Dominating set

DOMINATING SET

entrée : Un graphe $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
question : Existe-t-il $D \subseteq V$ avec $|D| \leq k$ et tel que pour tout $x \in V$, soit $x \in D$, soit x est adjacent à un sommet $y \in D$?



Dominating set

DOMINATING SET

entrée : Un graphe $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
question : Existe-t-il $D \subseteq V$ avec $|D| \leq k$ et tel que pour tout $x \in V$, soit $x \in D$, soit x est adjacent à un sommet $y \in D$?

Résultats connus :

- Lorsque paramétré par la taille de la solution : W[2]-difficile
- Lorsque paramétré par la treewidth :
  - FPT (formule MSO)
  - Pas de noyau polynomial (OU-composition d'une version raffinée, puis transformation) [Bodlaender & al. 2009]

Dominating set

- Lorsque paramétré par la taille d'un vertex cover : pas de noyau polynomial

[M. Dom, D. Lokshtanov, and S. Saurabh. Incompressibility through colors and IDs. 2009]

Idée :

Dominating set

- Lorsque paramétré par la taille d'un vertex cover : pas de noyau polynomial

[M. Dom, D. Lokshtanov, and S. Saurabh. Incompressibility through colors and IDs. 2009]

Idée :

- OU-composition de la version colorée de HITTING SET paramétré par la taille de la solution et de l'univers.

Dominating set

- Lorsque paramétré par la taille d'un vertex cover : pas de noyau polynomial

[M. Dom, D. Lokshtanov, and S. Saurabh. Incompressibility through colors and IDs. 2009]

Idée :

- OU-composition de la version colorée de HITTING SET paramétré par la taille de la solution et de l'univers.

COLORED HITTING SET

entrée : Une famille d'ensembles F sur un univers U et un entier k. Les éléments de U sont colorés avec k couleurs.
question : Existe-t-il un sous ensemble S de U contenant exactement un élément de chaque couleur et tel que chaque ensemble de F ait une intersection non vide avec S ?

Dominating set

- Lorsque paramétré par la taille d'un vertex cover : pas de noyau polynomial

[M. Dom, D. Lokshtanov, and S. Saurabh. Incompressibility through colors and IDs. 2009]

<u>Idée</u> :

- OU-composition de la version colorée de HITTING SET paramétré par la taille de la solution et de l'univers.
- Transformation paramétrée polynomiale de COLORED HITTING SET paramétré par $k + |U|$ vers DOMINATING SET paramétré par la taille d'un vertex cover.

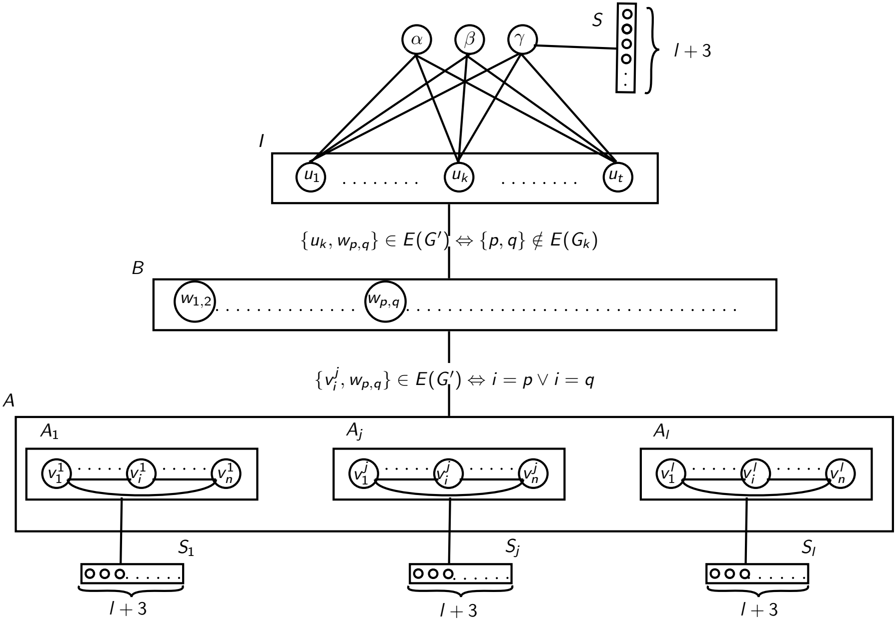
Cross-composition de VERTEX COVER vers DOMINATING SET paramétré par la taille d'un vertex cover

Soit $(G_1, l_1), ..., (G_t, l_t)$ avec $|V(G_i)| = |V(G_j)| = n$ et $l_i = l_j = l$
On construit en temps polynomial :

- un graphe $G' = (V', E')$
- $l' \in \mathbb{N}$
- $Z' \subseteq V'$

Tels que :

- il existe un G_i qui contient un vertex cover de taille $l \Leftrightarrow G'$ contient un ensemble dominant de taille l'
- Z' est un vertex cover de G'
- $|Z'|$ est polynomial en n

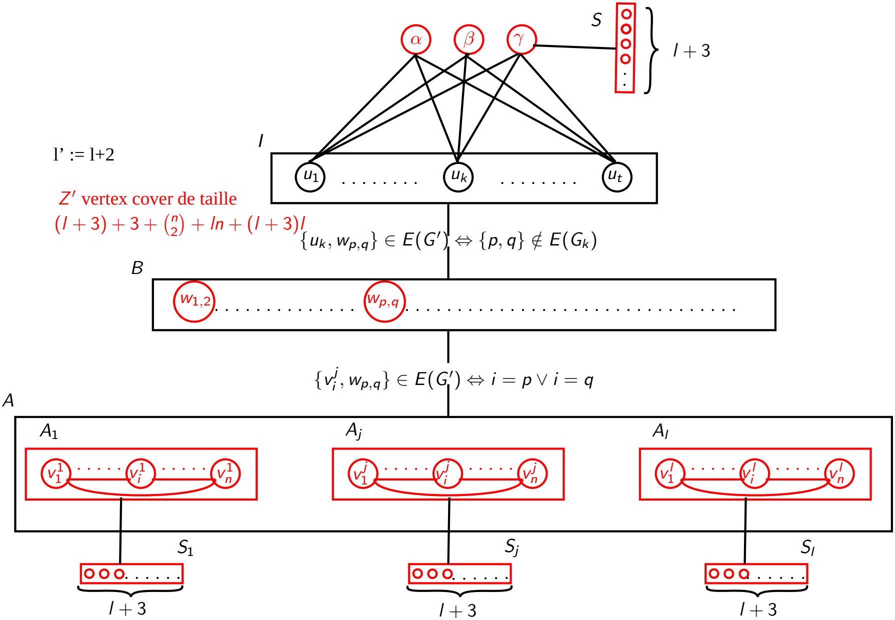


S
$l+3$
α β γ
I
u_1 u_k u_t
$\{u_k, w_{p,q}\} \in E(G') \Leftrightarrow \{p,q\} \notin E(G_k)$
B
$w_{1,2}$ $w_{p,q}$
$\{v_i^j, w_{p,q}\} \in E(G') \Leftrightarrow i = p \vee i = q$
A
A_1 A_j A_l
v_1^1 v_i^1 v_n^1
v_1^j v_i^j v_n^j
v_1^l v_i^l v_n^l
S_1 S_j S_l
$l+3$ $l+3$ $l+3$

l' := l+2

Z' vertex cover de taille

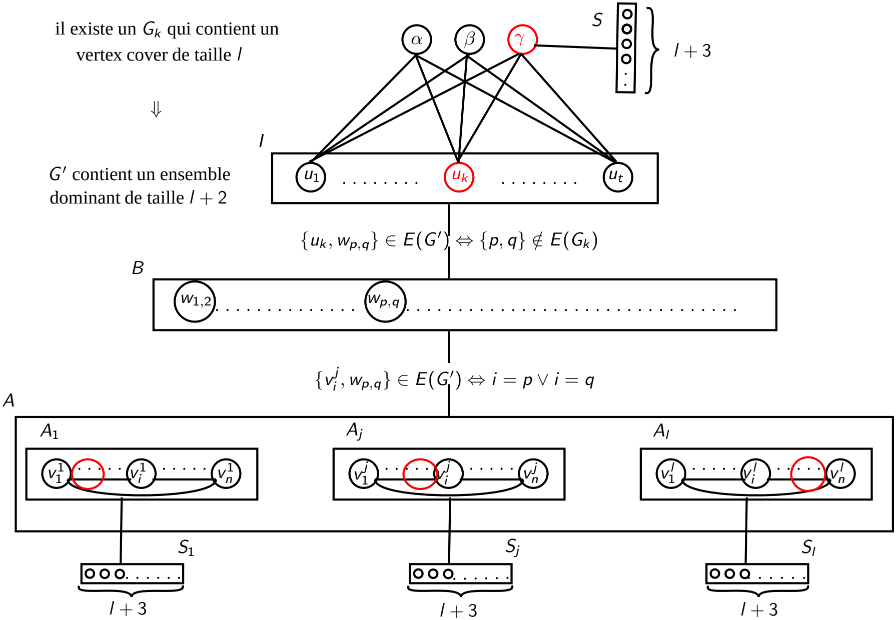
$(l+3)+3+\binom{n}{2}+ln+(l+3)l$



il existe un G_k qui contient un vertex cover de taille l

$\Downarrow$

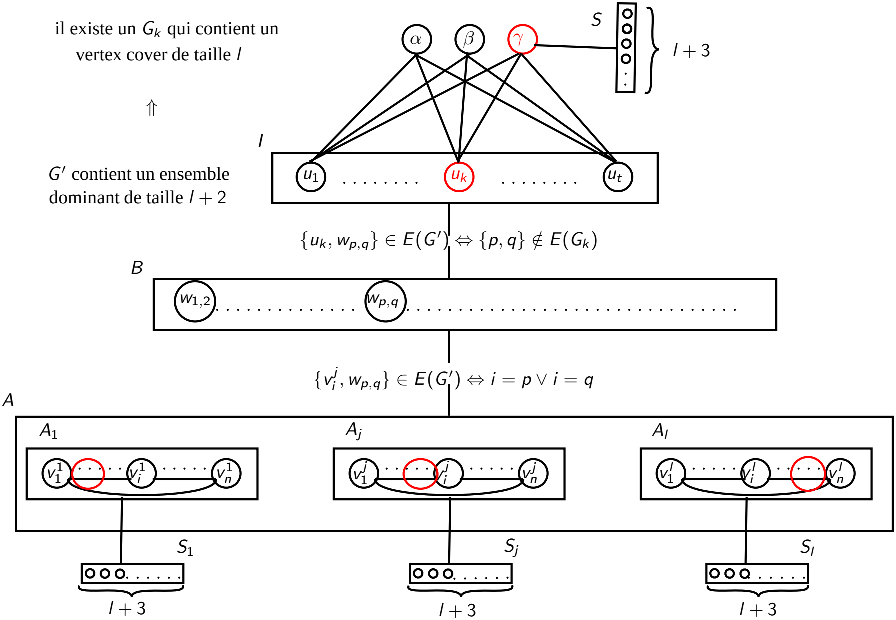
G' contient un ensemble dominant de taille $l+2$



il existe un G_k qui contient un vertex cover de taille l

$\Uparrow$

G' contient un ensemble dominant de taille $l+2$



Sommaire

Hiérarchie de paramètres

- Pourquoi paramétrer DOMINATING SET par la taille d'un vertex cover ?
  - $X \subseteq V$ vertex cover $\Rightarrow X$ dominating set
    $\Rightarrow |\text{vertex cover}| \geq |\text{dominating set}|$

Hiérarchie de paramètres

- Pourquoi paramétrer DOMINATING SET par la taille d'un vertex cover ?
  - $X \subseteq V$ vertex cover $\Rightarrow X$ dominating set
    $\Rightarrow$ |vertex cover| $\geq$ |dominating set|

- De manière générale :
  - Si (Q, κ_1) n'admet pas de noyau polynomial :
    On cherche des paramétrisations $\kappa_2(x) \geq \kappa_1(x)$
  - Si (Q, κ_1) admet un noyau polynomial :
    On cherche des paramétrisations $\kappa_2(x) \leq \kappa_1(x)$

Proposition

Si (Q, κ_1) admet un noyau polynomial et $\kappa_1(x) \leq poly(\kappa_2(x))$ alors (Q, κ_2) admet un noyau polynomial

Hiérarchie de paramètres

- Autre raison :
  Certains problèmes de graphes sont faciles sur des classes de graphes particulières : forêts, chemins, chordals, treewidth bornée...

Hiérarchie de paramètres

- Autre raison :
  Certains problèmes de graphes sont faciles sur des classes de graphes particulières : forêts, chemins, chordals, treewidth bornée...

Distance à trivialité : Si Q facilement résolvable sur $\mathcal{F}$: paramétrisation par *"nombre de sommets à enlever pour appartenir à $\mathcal{F}$"*

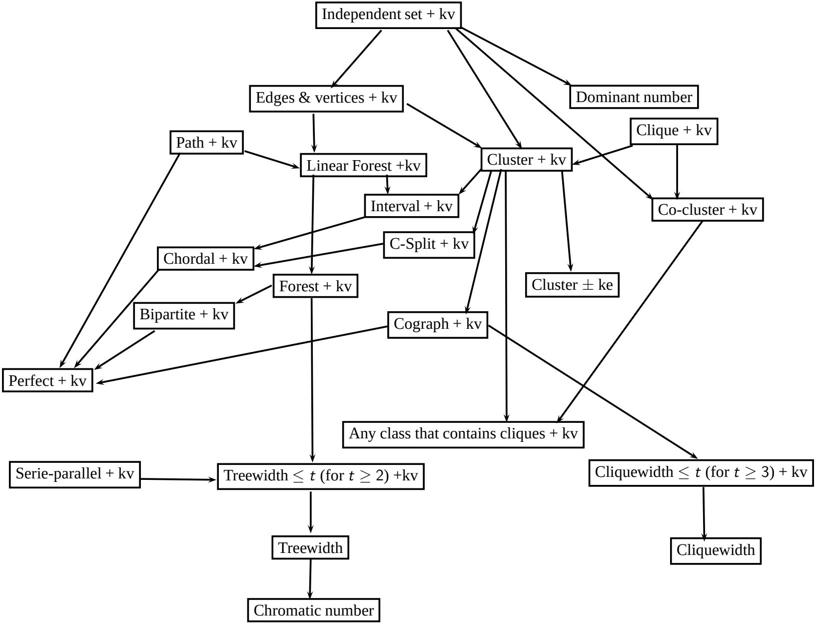
Définition : modulateur

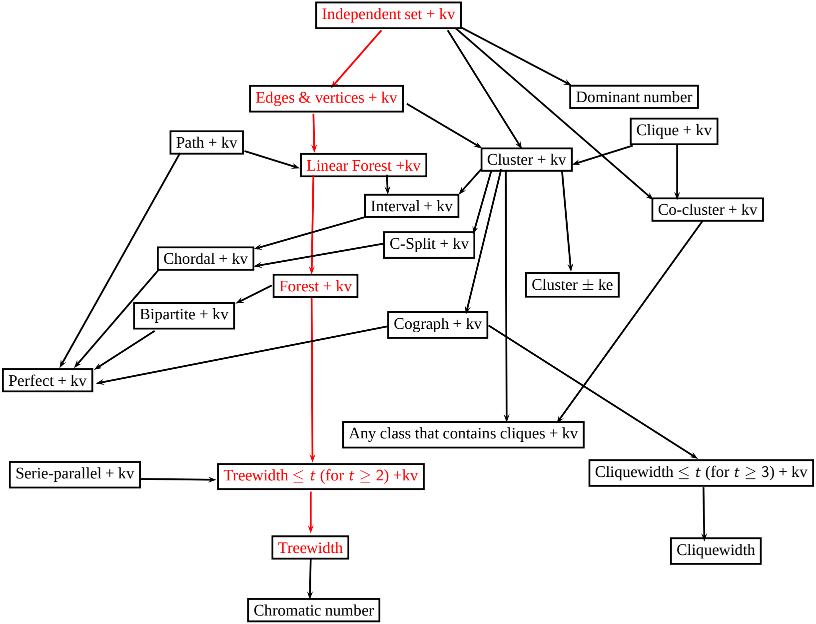
Un **modulateur** d'un graphe G pour une classe de graphes $\mathcal{F}$ est un ensemble de sommets $X \subseteq V$ tel que $G[V \backslash X] \in \mathcal{F}$.
On note cette paramétrisation $\mathcal{F}+kv$

Proposition

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux classes de graphes telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, et G un graphe. Alors $\mathcal{A}+kv(G) \geq \mathcal{B}+kv(G)$.

Exemple : $\underbrace{Independentset + kv}_{\text{vertex cover}} \geq \underbrace{Forest + kv}_{\text{feedback vertex set}}$


Independent set + kv
Edges & vertices + kv
Dominant number
Path + kv
Linear Forest +kv
Cluster + kv
Clique + kv
Interval + kv
Co-cluster + kv
C-Split + kv
Chordal + kv
Forest + kv
Cluster ± ke
Bipartite + kv
Cograph + kv
Perfect + kv
Any class that contains cliques + kv
Serie-parallel + kv
Treewidth ≤ t (for t ≥ 2) +kv
Cliquewidth ≤ t (for t ≥ 3) + kv
Treewidth
Cliquewidth
Chromatic number


Independent set + kv
Dominant number
Edges & vertices + kv
Path + kv
Clique + kv
Linear Forest +kv
Cluster + kv
Interval + kv
Co-cluster + kv
C-Split + kv
Chordal + kv
Cluster ± ke
Forest + kv
Bipartite + kv
Cograph + kv
Perfect + kv
Any class that contains cliques + kv
Serie-parallel + kv
Treewidth ≤ t (for t ≥ 2) +kv
Cliquewidth ≤ t (for t ≥ 3) + kv
Treewidth
Cliquewidth
Chromatic number

Hiérarchie de paramètres

Quelques résultats, questions :

- VERTEX COVER paramétré par :
  - vertex cover : noyau polynomial [Chen & al. 2001]
  - feedback vertex set : noyau polynomial [Jansen, Bodlaender, 2010]
  - distance à treewidth $\leq$ t ($t \geq 2$) : problème ouvert
  - treewidth : pas de noyau polynomial [Bodlaender & al. 2009]

3-DOMATIC PARTITION

3-DOMATIC PARTITION

entrée : Un graphe $G = (V, E)$.
question : Peut-on partitionner V en 3 ensembles dominants disjoints ?

Théorème [Bodlaender & al. 2009]

3-DOMATIC PARTITION n'admet pas de noyau polynomial si paramétré par la treewidth, sauf si la AND-conjecture ne tient pas (i.e. si tous les problèmes coNP-complets admettent un algorithme de distillation).

3-DOMATIC PARTITION

3-DOMATIC PARTITION

entrée : Un graphe $G = (V, E)$.
question : Peut-on partitionner V en 3 ensembles dominants disjoints ?

Théorème

3-DOMATIC PARTITION n'admet pas de noyau polynomial si paramétré par le nombre de sommets à enlever pour avoir un graphe de pathwidth ≤ 2.

Idée de la preuve : transformation paramétrée polynomiale à partir de 3-COLORATION paramétré par Path+kv

3-DOMATIC PARTITION

3-DOMATIC PARTITION

entrée : Un graphe $G = (V, E)$.
question : Peut-on partitionner V en 3 ensembles dominants disjoints ?

Théorème

3-DOMATIC PARTITION n'admet pas de noyau polynomial si paramétré par le nombre de sommets à enlever pour avoir un graphe de pathwidth ≤ 2.

problèmes ouverts :

- 3-DOMATIC PARTITION admet-il un noyau polynomial si paramétré par la taille d'un feedback vertex set ?
- 3-DOMATIC PARTITION admet-il un noyau polynomial si paramétré par la taille d'un vertex cover ?

Thank you !