Complexité paramétrée de problèmes de compaction de graphes

Rémi Watrigant, Marin Bougeret, Rodolphe Giroudeau

LIRMM-Université Montpellier 2, France

JGA 2013
13-15 Novembre 2013

Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

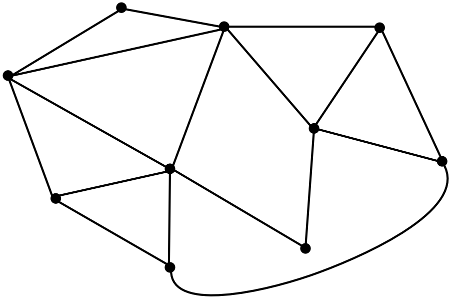
$G_{\mathcal{P}}$ = graphe quotient :

Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

$G_{\mathcal{P}}$ = graphe quotient :

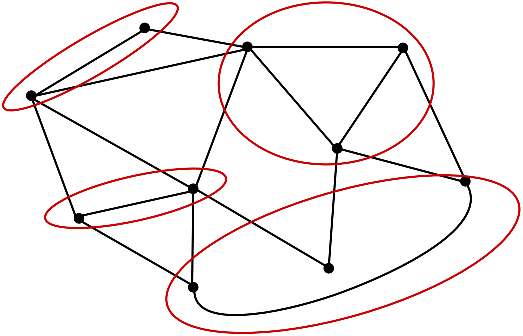


Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

$G_{\mathcal{P}}$ = graphe quotient :

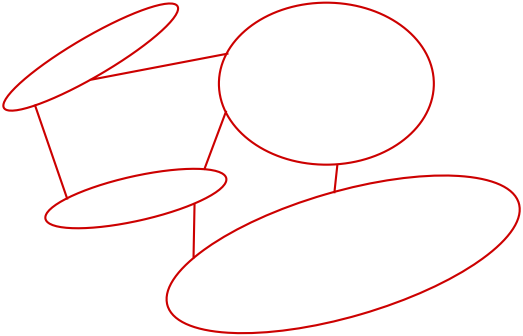


Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

$G_{\mathcal{P}}$ = graphe quotient :

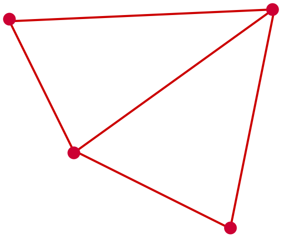


Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

$G_{\mathcal{P}}$ = graphe quotient :



Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

- proche du problème Π-edge contraction (mais différent, car les parties ne sont pas forcément connexes)

Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_{\mathcal{P}}$ satisfasse la propriété Π ?

- proche du problème Π-edge contraction (mais différent, car les parties ne sont pas forcément connexes)
- lorsque Π = "être isomorphe à H" avec H fixé, alors plusieurs résultats connus
  - *NP*-hard si H est un cycle [Vikas,Hell,2004]
  - Polynomial is H est chordal [Vikas,2006]
  - ...

Compactions de graphes

Π-compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k \leq |V|$.
Question: Existe-t-il une partition $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de V telle que $G_\mathcal{P}$ satisfasse la propriété Π ?

- proche du problème Π-edge contraction (mais différent, car les parties ne sont pas forcément connexes)
- lorsque $\Pi =$ "être isomorphe à H" avec H fixé, alors plusieurs résultats connus
  - *NP*-hard si H est un cycle [Vikas,Hell,2004]
  - Polynomial is *H* est chordal [Vikas,2006]
  - ...
- on s'intéresse à des propriétés "optimisation combinatoire" :
  - $\Pi =$ "degré max $\leq C$" $\rightarrow$ **Bounded Degree *k*-Compaction**
  - $\Pi =$ "nombre d'arêtes $\leq C$" $\rightarrow$ **Sparsest *k*-Compaction**

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C — paramètre standard : valeur de la solution

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

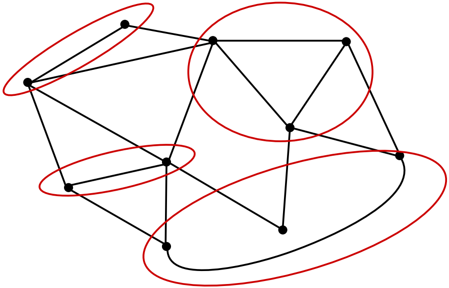
- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C — paramètre standard : valeur de la solution
- k — on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ — $=$ nombre de "compactions" de paires de sommets

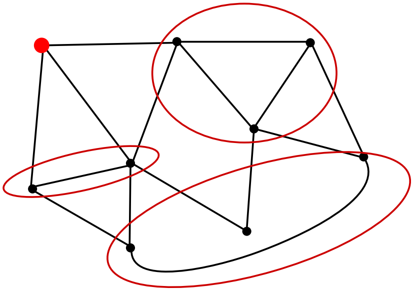


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

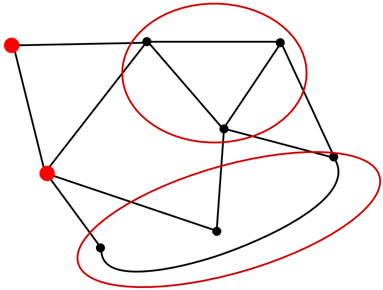


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_\mathcal{P})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

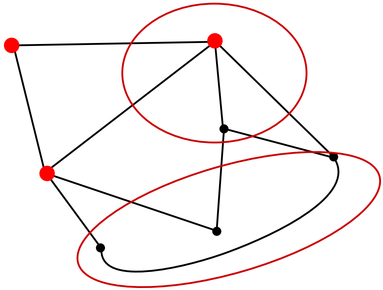


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

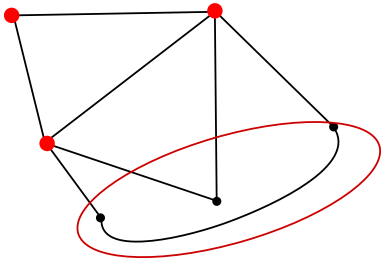


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C — paramètre standard : valeur de la solution
- k — on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ — $=$ nombre de "compactions" de paires de sommets

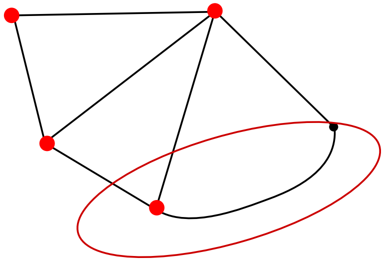


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

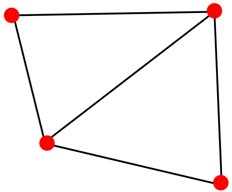


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets



Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Complexité paramétrée: si k est le paramètre choisi, et n la taille de l'instance :

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Complexité paramétrée: si k est le paramètre choisi, et n la taille de l'instance :

Algorithme **XP** : résolution en temps polynomial pour tout k fixé.
Exemple : $O(n^k)$, $O(2^k \cdot n^3)$...

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Complexité paramétrée: si k est le paramètre choisi, et n la taille de l'instance :

Algorithme **XP** : résolution en temps polynomial pour tout k fixé.
Exemple : $O(n^k)$, $O(2^k \cdot n^3)$...

Algorithme **FPT** (Fixed Parameter Tractable) : résolution en temps $f(k).poly(n)$ avec f une fonction quelconque.

Remarque : $FPT \subset XP$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Complexité paramétrée: si k est le paramètre choisi, et n la taille de l'instance :

Algorithme **XP** : résolution en temps polynomial pour tout k fixé.
Exemple : $O(n^k)$, $O(2^k \cdot n^3)$...

Algorithme **FPT** (Fixed Parameter Tractable) : résolution en temps $f(k).poly(n)$ avec f une fonction quelconque.

Remarque : $FPT \subset XP$

Hiérarchie de classes $W[0] \subset W[1] \subset W[2] \subset \cdots \subset XP$

- $W[0] = FPT$
- hypothèse : $W[i] \neq FPT$ pour tout $i \geq 1$
  $\longrightarrow$ classes closes par réduction FPT
  $\longrightarrow$ $W[1]$-dur $\Rightarrow$ pas d'algo FPT

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

- FPT paramétré par $(\hat{k}, C)$
- $W[1]$-dur paramétré par C (et même par k)
- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$ (même dans les split graphes)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

- *FPT* paramétré par $(\hat{k}, C)$
- $W[1]$-dur paramétré par C (et même par k)
- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$ (même dans les split graphes)

Question ouverte :

- *XP* paramétré par k ? = polynomial pour k fixé, *e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

- *FPT* paramétré par $(\hat{k}, C)$
- $W[1]$-dur paramétré par C (et même par k)
- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$ (même dans les split graphes)

Question ouverte :

- *XP* paramétré par k ? = polynomial pour k fixé, *e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

- toute compaction de 2 sommets divise le nombre d'arêtes par 2 au plus

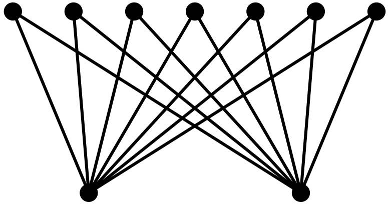
Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

- toute compaction de 2 sommets divise le nombre d'arêtes par 2 au plus



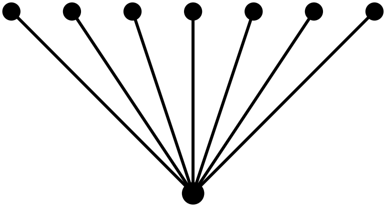
Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

- toute compaction de 2 sommets divise le nombre d'arêtes par 2 au plus



Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

- toute compaction de 2 sommets divise le nombre d'arêtes par 2 au plus
- $\Rightarrow$ si $|E| > (C+1) \cdot 2^{\hat{k}}$ alors impossible

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par $(\hat{k} + C)$. $(\hat{k} = n - k)$

Noyau exponentiel :

- toute compaction de 2 sommets divise le nombre d'arêtes par 2 au plus
- $\Rightarrow$ si $|E| > (C + 1) \cdot 2^{\hat{k}}$ alors impossible
- Sinon : $|E| \leq (C + 1) \cdot 2^{\hat{k}} \rightarrow$ noyau exponentiel

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

- FPT paramétré par $(\hat{k}, C)$
- $W[1]$-dur paramétré par C (et même par k)
- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$ (même dans les split graphes)

Question ouverte :

- XP paramétré par k ? = polynomial pour k fixé, *e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

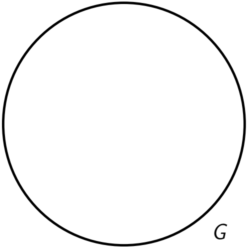
Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

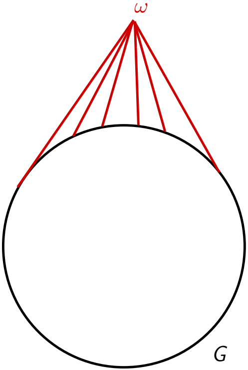


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

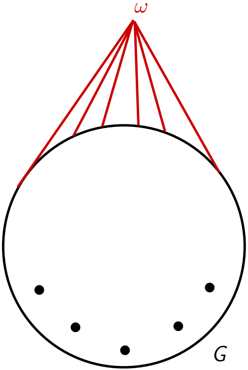


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

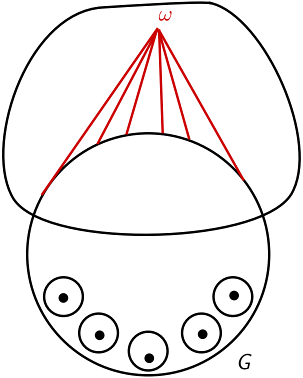


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

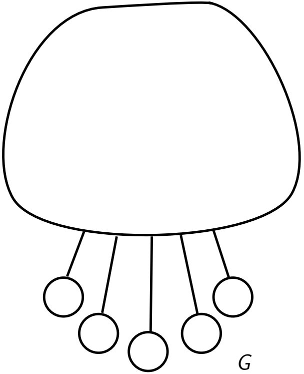


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k+1, C' = k)$

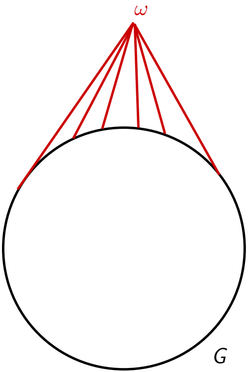


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

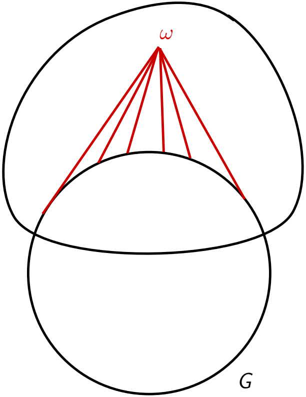


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$

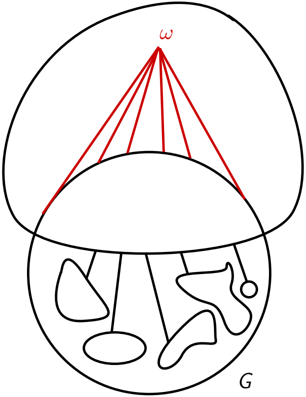


Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Réduction depuis Independent Set : $(G, k) \longrightarrow (G' = G \cup \omega,\ k' = k + 1, C' = k)$



Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Paramètres intéressants :

- C paramètre standard : valeur de la solution
- k on a toujours $C \leq \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n - k$ = nombre de "compactions" de paires de sommets

Résultats:

- FPT paramétré par $(\hat{k}, C)$
- $W[1]$-dur paramétré par C (et même par k)
- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$ (même dans les split graphes)

Question ouverte :

- XP paramétré par k ? = polynomial pour k fixé, *e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

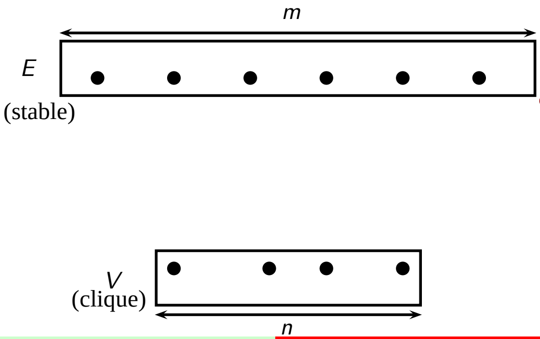
Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



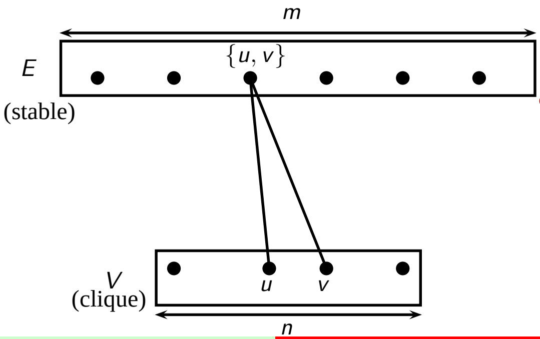
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



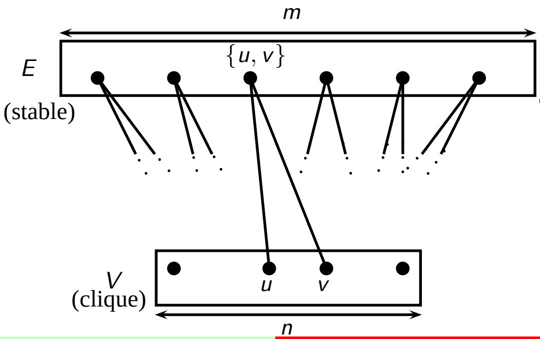
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



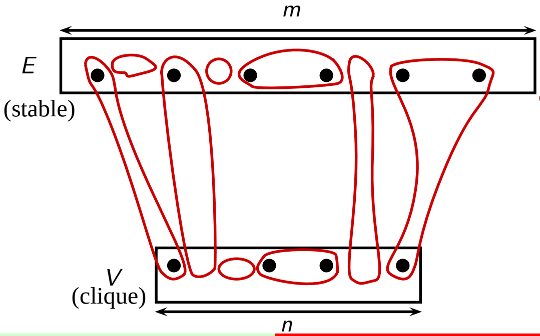
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



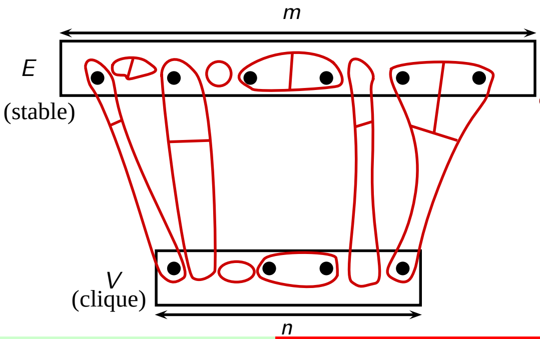
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_\mathcal{P})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



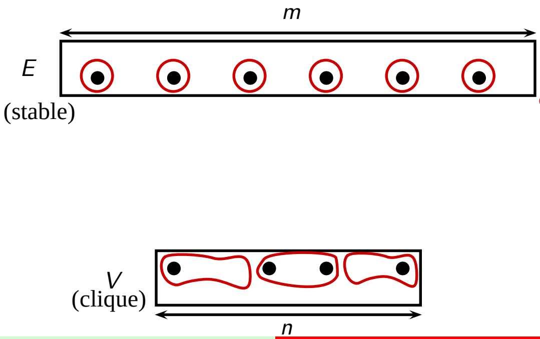
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



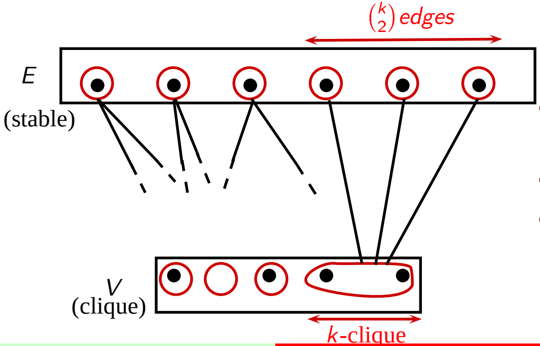
- G': split graph d'adjacence de G

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



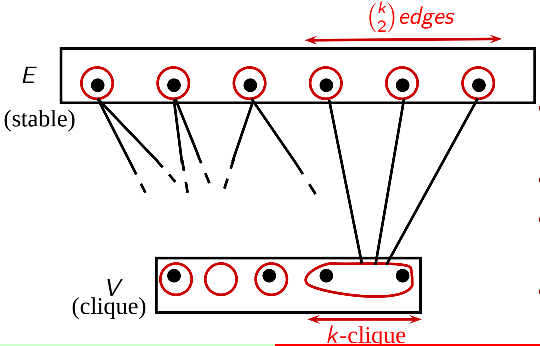
- G': split graph d'adjacence de G
- $k' = m + (n - k) + 1$
- $C' = \binom{n-k+1}{2} + 2m - \binom{k}{2}$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_\mathcal{P})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$. $(\hat{k} = n - k)$
(même dans les split graphes).

Réduction depuis Clique : soit $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$



- G': split graph d'adjacence de G
- $k' = m + (n - k) + 1$
- $C' = \binom{n-k+1}{2} + 2m - \binom{k}{2}$
- $\hat{k} = n' - k' = k - 1$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs :

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs :
On a vu :

- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs :
On a vu :

- $W[1]$-dur paramétré par $\hat{k}$

Mais :

- FPT paramétré par k

Sparsest k-Compaction

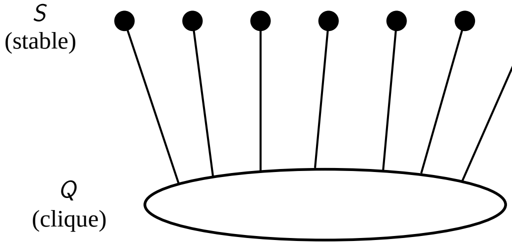
Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par k.

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par k.

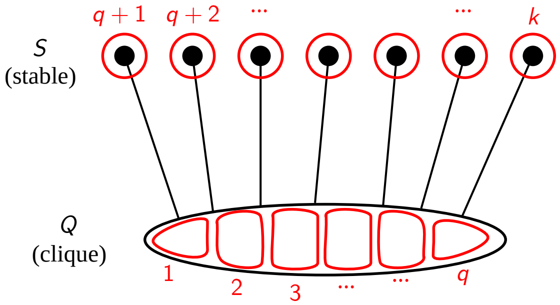


- $|S| \leq k - 1$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

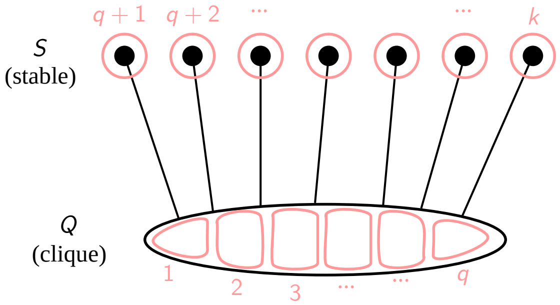


- $|S| \leq k - 1$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

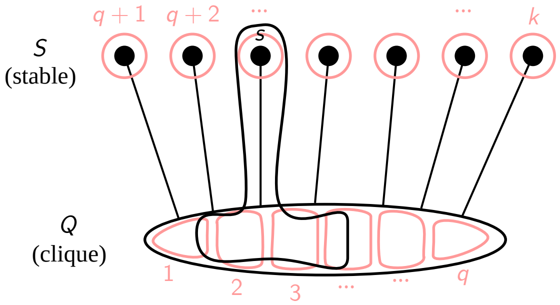


- $|S| \leq k - 1$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

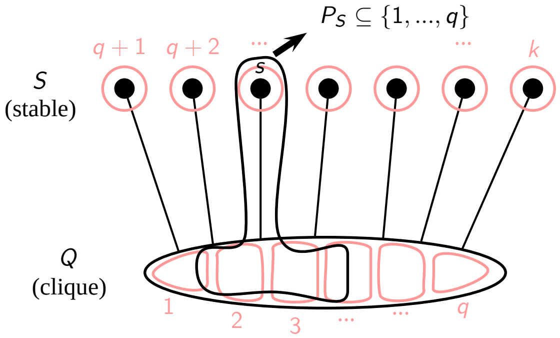


- $|S| \leq k - 1$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

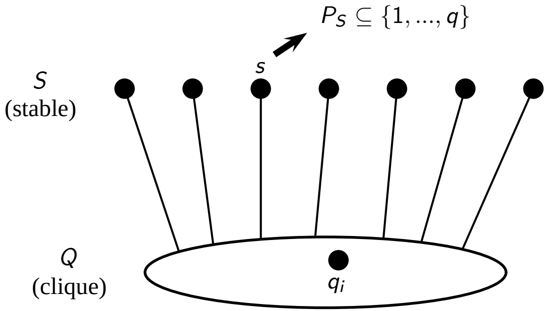


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

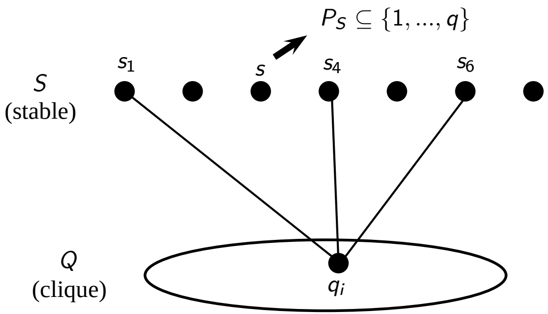


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

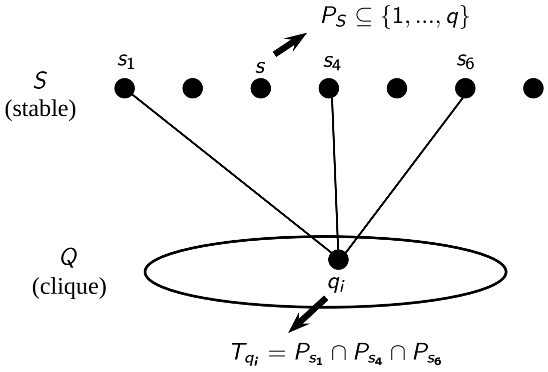


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

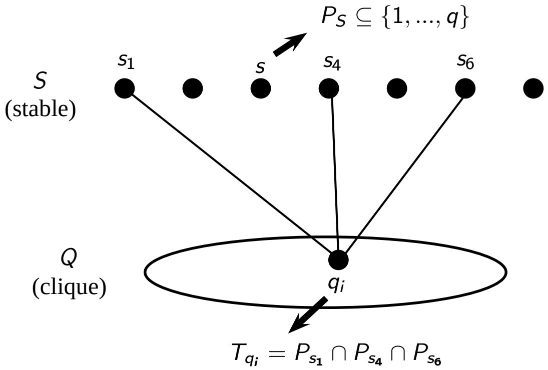


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

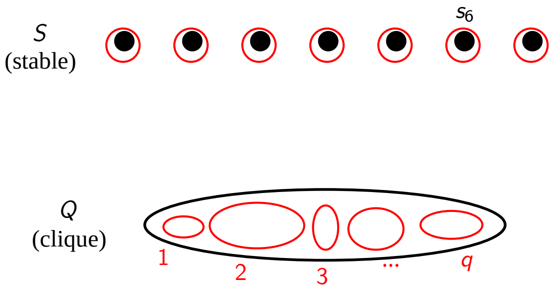


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par k.

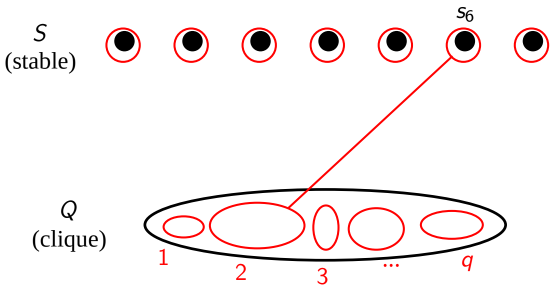


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

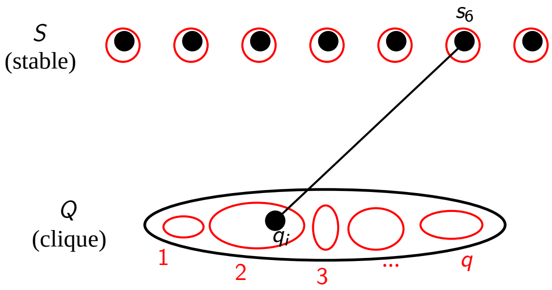


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par k.

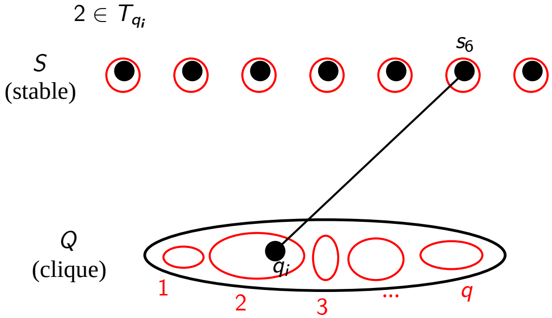


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

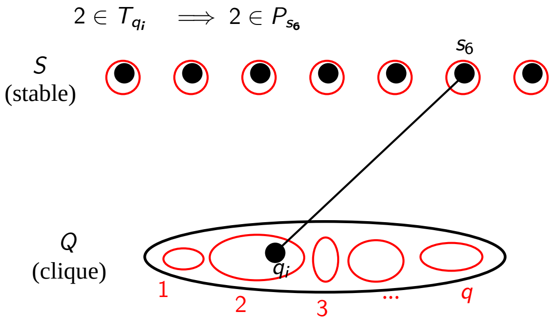


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

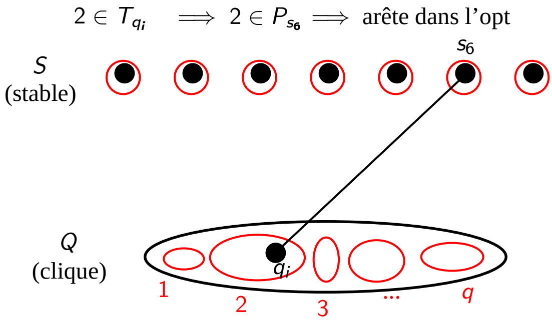


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_\mathcal{P})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est FPT paramétré par k.

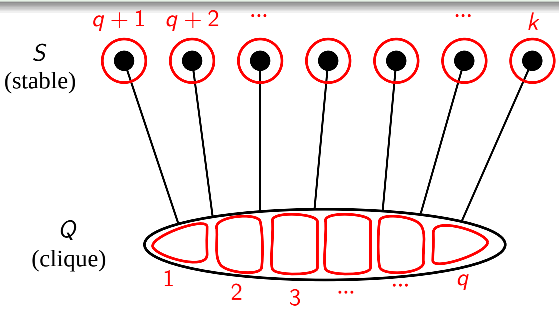


- $|S| \leq k - 1$
- guess $P_s \subseteq \{1, ..., k\}$ (en temps $O(2^{k^2})$)
- $T_{q_i} = \bigcap_{s \in N(q_i)} P_s$
- choisir parmi T_{q_i} (arbitrairement)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

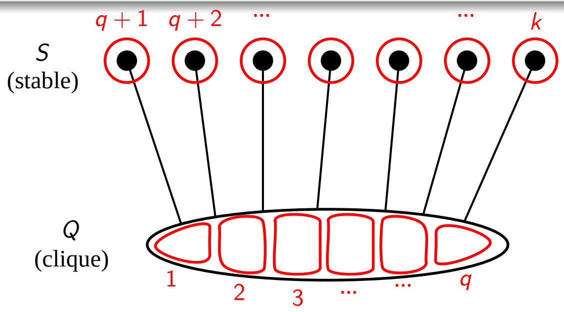
Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.



Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.

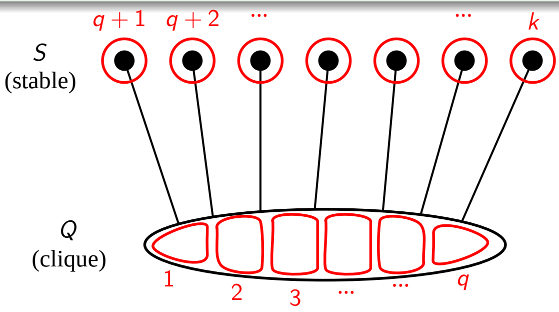


Autre paramètre intéressant : $q = k - |S|$

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Dans les split graphs, Sparsest k-Compaction est *FPT* paramétré par k.



Autre paramètre intéressant : $q = k - |S|$
Mais :

- $W[1]$-dur paramétré par q (réduction depuis Min-k-Cut)
- algorithme *XP* généraliserait l'algo *XP* de Min-k-Cut (pour hypergraphes)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Problème ouvert :

Est-ce que Sparsest k-Compaction est XP paramétré par k ?
(*e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$)

Idée naturelle :

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Problème ouvert :

Est-ce que Sparsest k-Compaction est XP paramétré par k ?
(*e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$)

Idée naturelle :

- énumérer tous les graphes quotient H (en temps $O^*(2^{k^2})$)
  puis tester la compaction vers H

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Problème ouvert :

Est-ce que Sparsest k-Compaction est XP paramétré par k ?
(*e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$)

Idée naturelle :

- énumérer tous les graphes quotient H (en temps $O^*(2^{k^2})$)
  puis tester la compaction vers H
- Mais : problème H-compaction NP-hard pour certains H fixés (ex : C_4)

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Problème ouvert :

Est-ce que Sparsest k-Compaction est XP paramétré par k ?
(*e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$)

Idée naturelle :

- énumérer tous les graphes quotient H (en temps $O^*(2^{k^2})$) puis tester la compaction vers H
- Mais : problème H-compaction NP-hard pour certains H fixés (ex : C_4)
- quand même polynomial pour $k = 3, 4$ (arguments ad-hoc) mais non généralisable pour tout k

Sparsest k-Compaction

Input: un graphe simple connexe non orienté $G = (V, E)$, $k, C \in \mathbb{N}$.
Question: Existe-t-il une compaction $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ telle que $|E(G_{\mathcal{P}})| \leq C$?

Sparsest k-Compaction est $W[1]$-dur paramétré par k. (et donc par C)

Problème ouvert :

Est-ce que Sparsest k-Compaction est XP paramétré par k ?
(*e.g.* temps $O^*(n^{f(k)})$)

Idée naturelle :

- énumérer tous les graphes quotient H (en temps $O^*(2^{k^2})$)
  puis tester la compaction vers H
- Mais : problème H-compaction NP-hard pour certains H fixés (ex : C_4)
- quand même polynomial pour $k = 3, 4$ (arguments ad-hoc)
  mais non généralisable pour tout k

Vision pessimiste :

- NP-dur pour un certain k fixé ?

Merci de votre attention !