M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

October 17, 2022

Résumé

calculer une intégrale :

- ??

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x) dx$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)}$$

avec x variable aléatoire, x_k une réalisation et $pdf(x_k)$ sa densité de probabilité.

Rappels : variable aléatoire

exemples :

- 1d,
- 2d, etc.
- sur des points, des directions, etc.
- conditionnées, lois marginales,
- continue, ou pas...

Rappels : densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^{b} pdf(t)dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_{a}^{b} pdf(t)dt$$

ou $\mathbb{P}$ est la probabilité de la variable aléatoire x, et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x.

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Rappels : densité de probabilité

proprietés :

$$\int pdf(t)dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout t}$$

- pour une variable aléatoire uniforme x, $pdf(x) = constante$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- sinon, pdf(x) prend une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance :

espérance de x, noté

$$E(x) = \int_{x \in D} x\, pdf(x)\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)\, pdf(x)\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire, de densité $pdf(x)$

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)\, pdf(x)\, dx$$

comment utiliser cette définition pour estimer $\int_{x \in D} f(x)\, dx$??

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x)dx$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)pdf(x)dx$ ...

et si on changeait de variable aléatoire ?

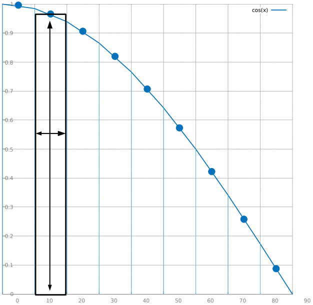
Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) dx$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) dx$ ...

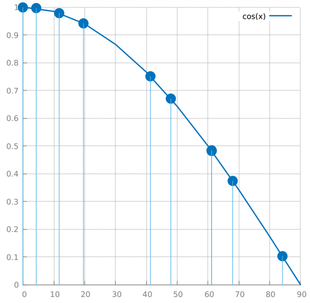
$$E\left(\frac{f(x)}{pdf(x)}\right) = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x)\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)}$$

et les rectangles ?



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{b-a}{N} f(x_i)$$

et sans les rectangles ?



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{pdf(x_i)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}f(x_i)$$

si $pdf(x_i) = 1/(b-a)\ldots$

et sans les rectangles ?

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{pdf(x_i)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{b-a}{N}f(x_i)$$

si $pdf(x_i) = 1/(b-a)$...

on pondère chaque $f(x_i)$ par la densité de la variable aléatoire...

plus la densité est importante, plus le poids est petit... et plus l'échantillonnage est *dense*.

en gros : la densité représente le rectangle associé à chaque point.

Intégration numérique : exemple

éclairage ambiant :

- on veut calculer :

$$I = \int_{\vec{\omega}\in\Omega} \frac{1}{\pi} V(\vec{\omega}) \cos\theta d\omega = \int_{\vec{\omega}\in\Omega} f(\vec{\omega}) d\omega$$

- quelle variable aléatoire pour écrire l'estimateur Monte Carlo ?
- espérance de $f(\vec{\omega})/pdf(\vec{\omega})$:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{\pi} V(\vec{\omega}_i) \cos\theta \frac{1}{pdf(\vec{\omega}_i)}$$

reste un petit détail à régler...

dernier détail...

$\vec{\omega}$??

- une variable aléatoire...
- de densité $pdf(\vec{\omega})$...

comment "générer" des réalisations de la variable aléatoire ?

dernier détail...

on triche :

- on sait générer des nombres aléatoires dans un carré $[0\,1]$,
- une variable aléatoire uniforme / constante...
- on transforme un point du carré en direction sur l'hémisphère,
- et on calcule en même temps le changement de densité...

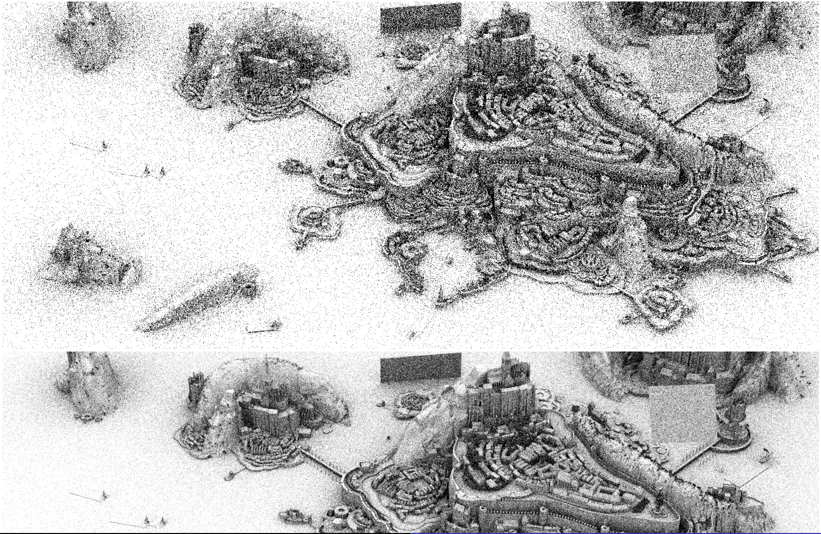
pour aujourd'hui : recette de cuisine,
cf recueil de formules GI Compendium

GI Compendium : recette 34

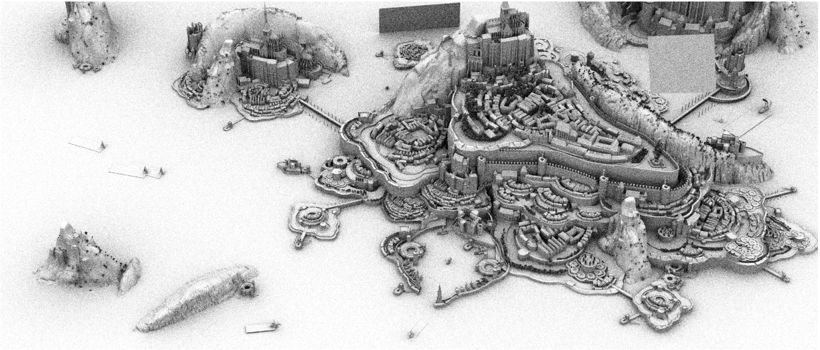
pour u_1 et u_2, nombres aléatoires entre 0 et 1 :

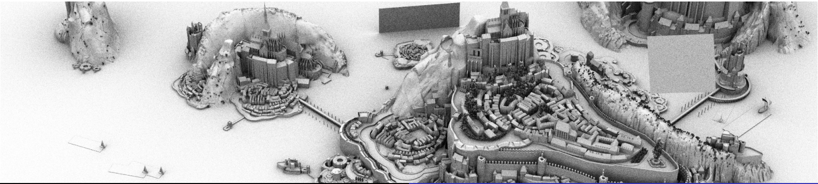
- $\cos\theta = u_1$
- $\phi = 2\pi u_2$
- $\vec{\omega} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$
- avec $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta \cos\theta}$,
- et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$

on peut finir le calcul...

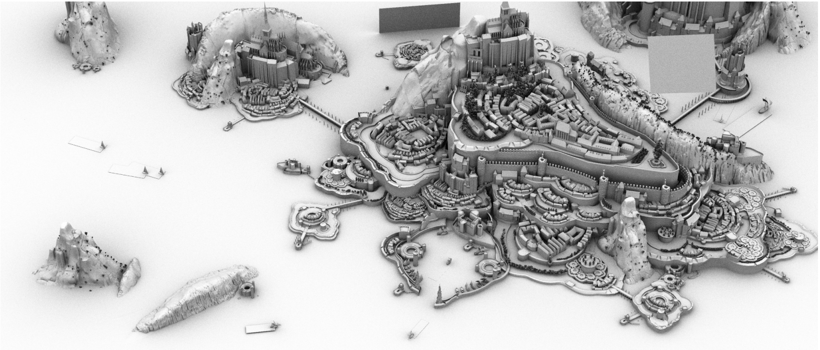


on peut finir le calcul...





on peut finir le calcul...



Intégration numérique : exemple

on veut connaitre :

$$I = \int_{s \in S} L_e(s, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_o) G(p, s) ds, \text{avec } \vec{\omega} = s - p$$

on calcule : $E\left(\frac{f(s)}{pdf(s)}\right)$

$$\int_{s \in S} L_e(s, -\vec{\omega})(\ldots) \frac{1}{pdf(s)} pdf(s) ds \equiv I$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} L_e(s_k, -\vec{\omega}_k)(\ldots) \frac{1}{pdf(s_k)} \approx I$$

exemple : éclairage direct efficace

variable aléatoire s ?

- choisir un point dans un triangle, une source de lumière...
- cf GI Compendium, eq 18
- $\beta = (1 - u_2)\sqrt{u_1}$
- $\gamma = u_2\sqrt{u_1}$
- avec u_1, u_2 valeurs aléatoires $\in [0..1]$
- $s(\beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma)a + \beta b + \gamma c$
- et $pdf(s) = \frac{1}{\text{Aire triangle abc}}$

et avec plusieurs sources / triangles ?

Intégration numérique : exemple

éclairage indirect :

- calculer la luminance incidente sur les autres directions ...
- $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega})(...)d\omega$,
- avec $\Omega = \Omega^+ - \Omega_S$

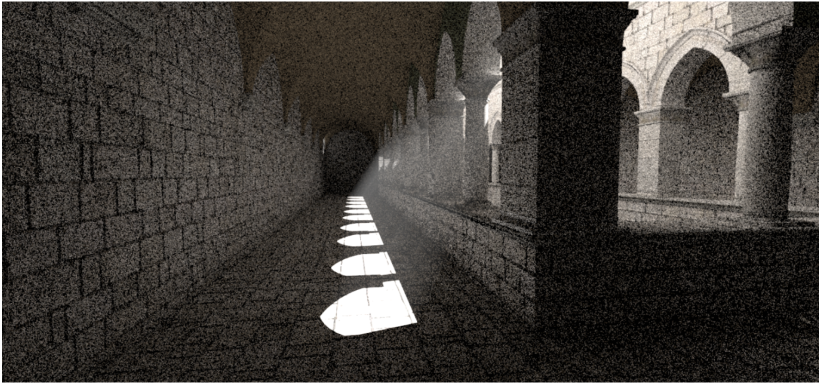
$$I = E(f/p) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

exemple : éclairage indirect

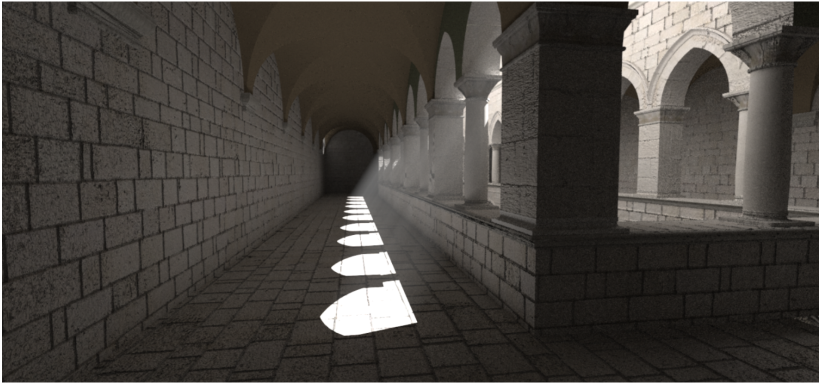
variable aléatoire $\vec{\omega}$?

- choisir une direction sur l'hémisphère,
- cf éclairage ambiant
- cf GI Compendium, eq 34 ou eq 35

exemple :



exemple :



et alors ?

on peut calculer l'image...

- mais il reste des défauts,
- du bruit, etc.
- comment améliorer la qualité du résultat ?

Monte Carlo

l'estimateur $\hat{I}$ n'est qu'une approximation de I :

- quelle est sa qualité ?
- comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que $\hat{I}$ converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :
pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

Variance

on mesure la qualité de $\hat{I}$ en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Faire mieux ...

2 solutions :

- augmenter le nombre d'échantillons,
- *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?