M2-Images

notions d'intégration numérique

J.C. Iehl

October 17, 2022

résumé des épisodes précédents

simulation :

- tout les objets éclairés recoivent de la lumière,
- cette lumière est réfléchie dans la scène ...
- et éclaire les objets visibles (par les objets éclairés)...
- sommer tout ça pour chaque point visible de la camera.

l'équation qui fait peur

$$L_r(p,\vec{\omega}_o) = L_e(p,\vec{\omega}_o) + \int_{\Omega^+} L_i(p,\vec{\omega}) f_r(p,\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_o) |\cos\theta| d\omega$$

avec :

- $L_r(p,\vec{\omega}_o)$: énergie réfléchie par p dans la direction $\vec{\omega}_o$,
- $L_e(p,\vec{\omega}_o)$: énergie émise par p dans la direction $\vec{\omega}_o$,
- Ω^+ : ensemble de directions autour du point p,
- $L_i(p,\vec{\omega}) = L_r(q,-\vec{\omega})$: énergie incidente en p dans la direction $\vec{\omega}$ = énergie réfléchie par q vers p,
- $f_r(p,\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$: matière de p,
- θ : angle entre la normale en p et $\vec{\omega}$.

en clair :

en clair :

- pour chaque point p visible par la camera,
- trouver toutes les sources visibles,
  $L_i(p, \vec{\omega}) > 0 \equiv L_e(s, \vec{-\omega}) > 0$,
  avec s un point sur une source,
  visible par p dans la direction $\vec{\omega}$, $V(p, s) \equiv 1$
- puis, trouver tous les objets visibles,
  et pour chaque point sur un objet visible, trouver quelles sources de lumière sont visibles...

$$L_r(p, \vec{\omega}_o) = L_e(p, \vec{\omega}_o) + \int_{\Omega^+} V(p, s) L_e(s, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_o) |\cos\theta| d\omega$$

qu'est ce qu'on calcule ?

calculer :

- pour un ensemble de directions, $\vec{\omega} \in \Omega^+$:
- si une source de lumière est visible dans la direction $\vec{\omega}$: $L_e(s, -\vec{\omega}) > 0$,
- calculer la lumière réfléchie par le point p vers la camera, $L_e(s, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_o) |\cos\theta|$,
- sommer pour toutes les directions autour du point p.

choisir des directions...

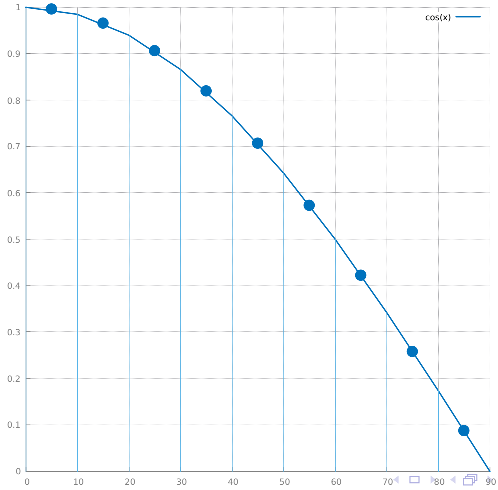
un ensemble de directions $\vec{\omega} \in \Omega^+$:

- autour d'un point sur un objet,
- ??

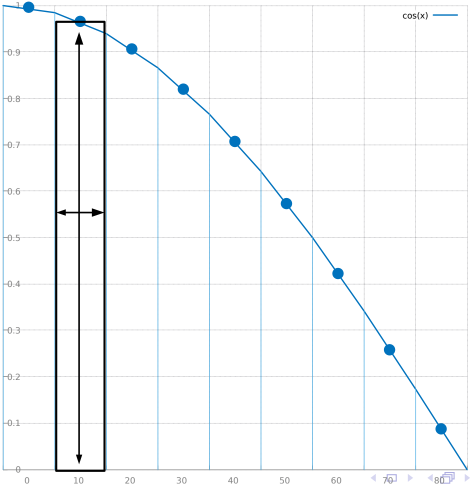
idée :

- rappel: intégration avec "la méthode des rectangles",
- fonctionne pour des fonctions 1d,
- mais les directions sont définies en 2d...

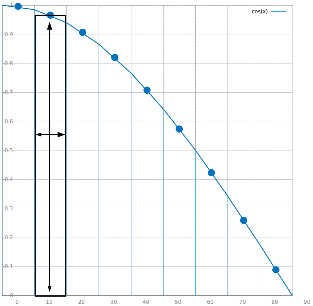
rappel : intégration avec des rectangles...



rappel : intégration avec des rectangles...



rappel : intégration avec des rectangles...



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{b-a}{N} f(x_i)$$

rappel : et les rectangles ?

et en 2d ?

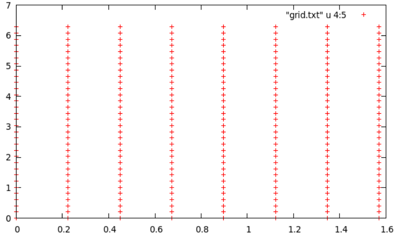
- c'est pareil, on découpe le domaine d'intégration...
- cf grille, avec $n \times n$ cases,
- et on pondère chaque $f(x_i, y_i)$ par le *volume* de sa case...

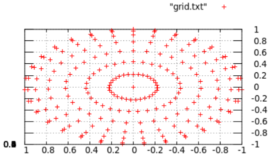
choisir des directions...

et construire une grille en 2d :

- coordonnées polaires $\vec{\omega} \equiv (\theta, \phi)$

grille en (θ, ϕ)

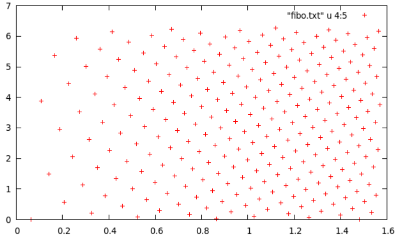


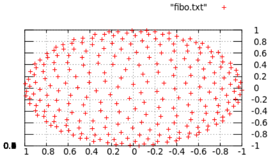


est ce que les cellules sont de même taille ?

est ce que c'est une grille ?

spirale de Fibonacci en (θ, ϕ)





est ce que les cellules sont de même taille ?
est ce que c'est une grille ?

spirale de Fibonacci

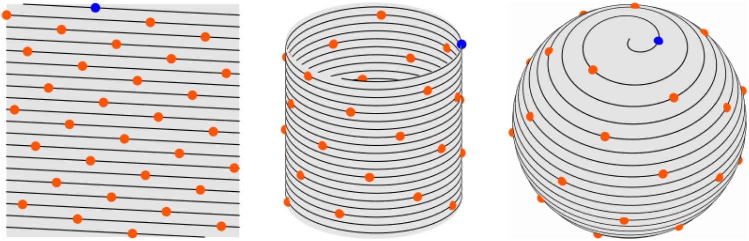


Figure 1: *Illustration of the construction of the point set* $\mathbf{SF}_i^{32}$, *showing the mapping from the grid through a cylinder to the sphere. The first point of the point set is marked blue.*

"Spherical Fibonacci Mapping"

spirale de Fibonacci

construction :

- pour $i \in N$ points
- $\cos\theta = 1 - \frac{2i+1}{2N}$
- $\phi = 2\pi \left[\frac{i}{\Phi}\right] \equiv 2\pi \left(\frac{i}{\Phi} - \left\lfloor\frac{i}{\Phi}\right\rfloor\right)$
- $(x, y, z) = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$
- avec $\Phi = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$
- avec $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

"Spherical Fibonacci Mapping"
B. Keinert, M. Innmann, M. Sanger
"Spherical Fibonacci Point Sets for Illumination Integrals"
R. Marques, C. Bouville, M. Ribardière, L.P. Santos, K. Bouatouch

retour au calcul...

rappel :

tester un ensemble de directions, $\vec{\omega} \in \Omega^+$...

dans quel repère connait-on les directions $\vec{\omega}$?

dans quel repère faut-il connaitre la direction du rayon ?

changement de repère...

$\vec{\omega}$ dans le repère de la scène :

- on connait les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans un repère local aligné sur la normale du point p,
- comment calculer les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans le repère de la scène ?

idée :

- on connait la normale n au point p,
- construire un 2ième vecteur en "modifiant" les coordonnées de n ?
- puis 2 produits vectoriels pour construire les 2 autres directions...

changement de repère...

idée :

- remplacer la plus petite composante (en valeur absolue) par 1,
- 2 produits vectoriels permettent enfin de construire 2 autres vecteurs orthogonaux...

plus rapide / plus simple :

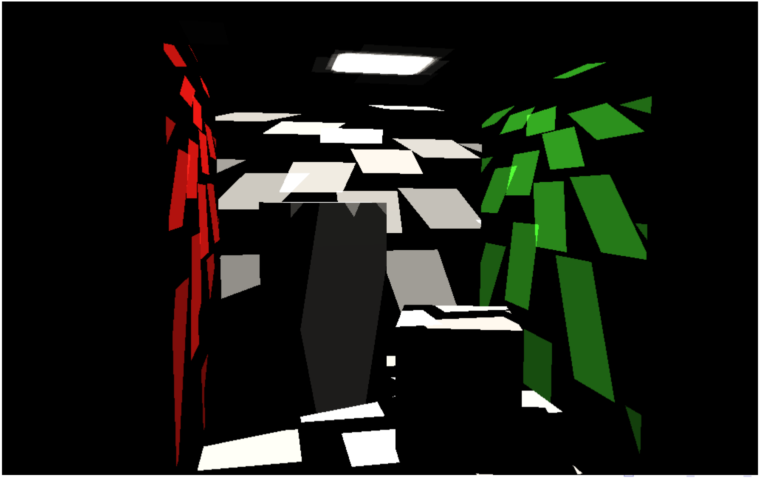
- "Building an Orthonormal Basis, Revisited"
- corrige un problème numérique de :
  "Building an Orthonormal Basis from a 3D Unit Vector Without Normalization"
  J.R. Frisvald

retour au calcul...

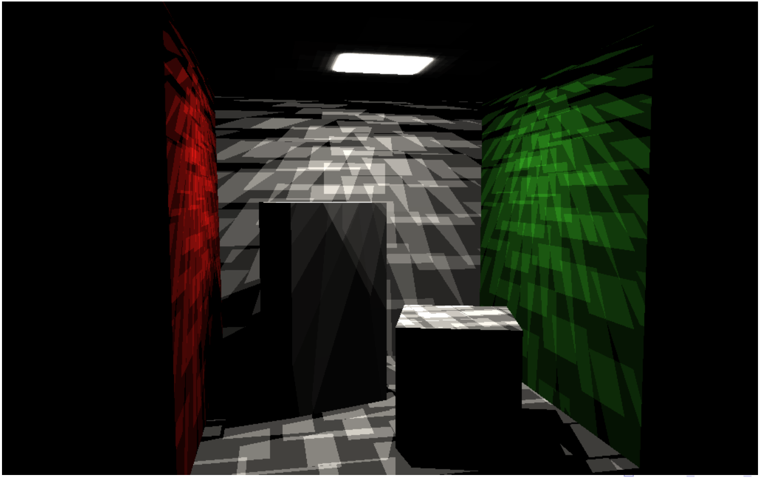
rappel :

- tester un ensemble de directions, $\vec{\omega} \in \Omega^+$...
- sommer la lumière émise par les sources visibles dans les N directions...
- ou :
  sommer la lumière réfléchie par les points visibles dans les N directions...

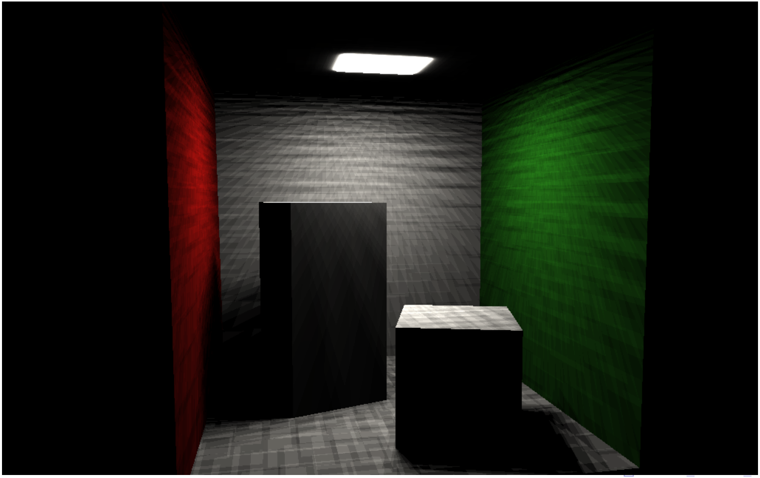
exemple : 64 directions / Fibonacci



exemple : 256 directions / Fibonacci



exemple : 1024 directions / Fibonacci



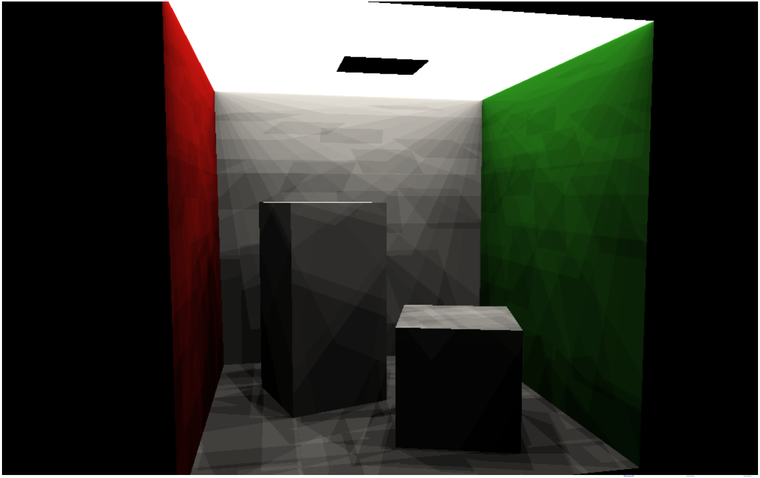
ça marche, mais...

et alors ?

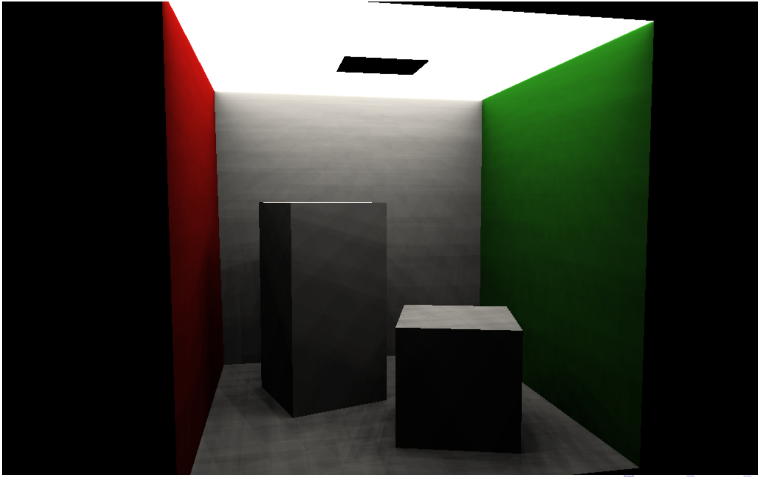
- si la source est "petite", il faut beaucoup de directions,
- le temps de calcul explose...

et accessoirement l'erreur est très "structurée"... bizarre, non ?

exemple : 64 directions / Fibonacci



exemple : 256 directions / Fibonacci



ça marche, mais...

idée :

- pas assez de précision pour un nombre raisonnable de directions...
- ??

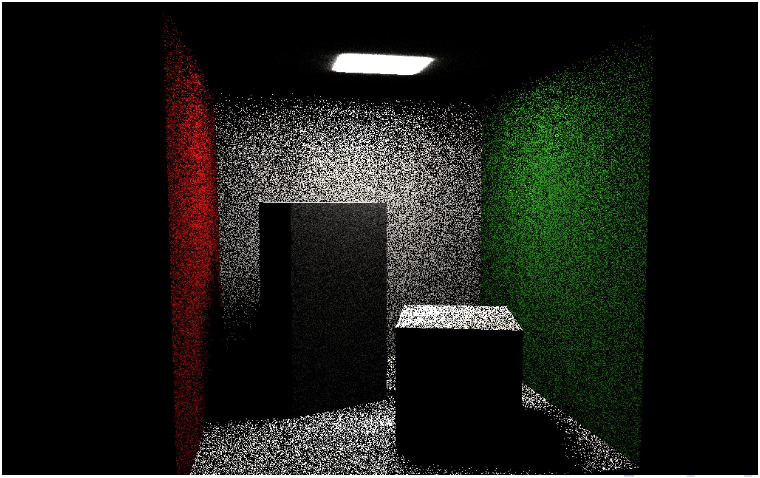
perturber l'orientation de la spirale ?

perturber la spirale de Fibonacci...

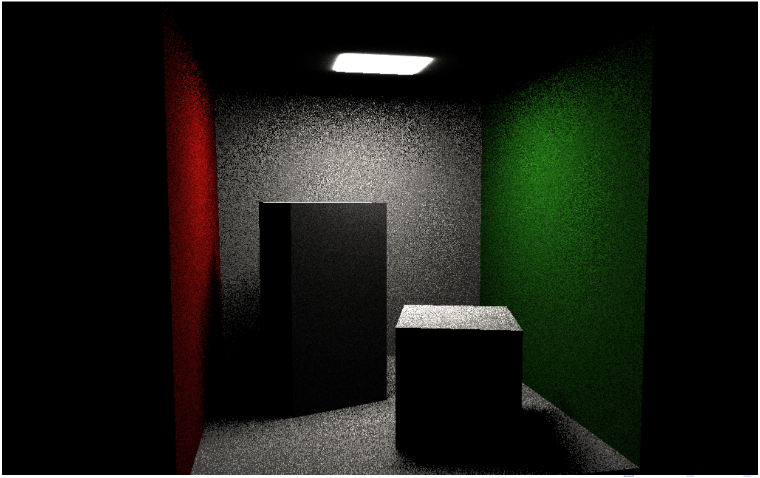
- rappel : $\phi = 2\pi \left[\frac{i}{\Phi}\right]$
- $\phi = 2\pi \left[\frac{i+u}{\Phi}\right]$
- avec u valeur aléatoire $\in [0..1]$, constante pour une spirale,
- plus difficile de perturber θ, pourquoi ?

chaque point p / pixel utilise des directions $\vec{\omega}$ différentes...

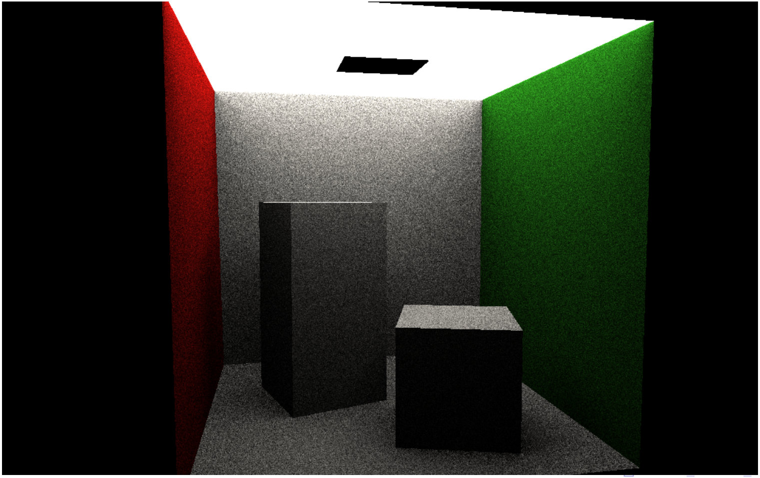
exemple : 64 directions / Fibonacci + perturbation ϕ



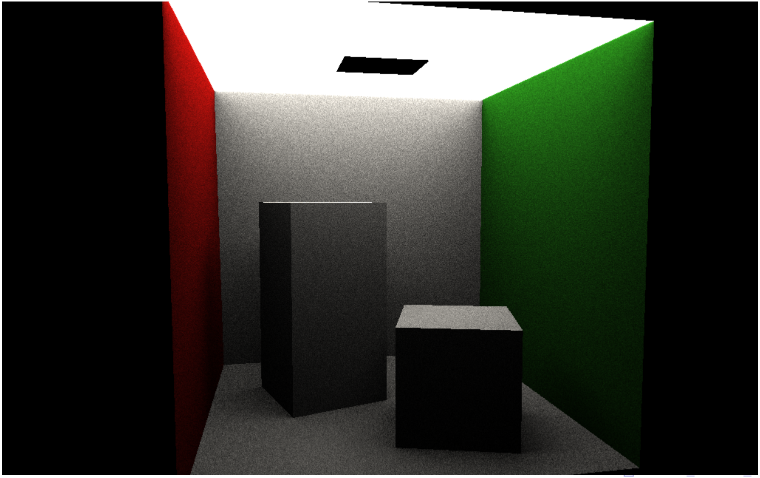
exemple : 256 directions / Fibonacci + perturbation ϕ



exemple : 64 directions / Fibonacci + perturbation ϕ



exemple : 256 directions / Fibonacci + perturbation ϕ



éclairage indirect

rappel :

- pour chaque point p visible par la camera,
- trouver toutes les sources visibles, $L_i(p, \vec{\omega}) > 0 \equiv L_e(s, \vec{-\omega}) > 0$,
  avec s un point sur une source,
  visible par p dans la direction $\vec{\omega}$, $V(p, s) \equiv 1$

- puis, trouver tous les objets visibles,
  et pour chaque point sur un objet visible, trouver quelles sources de lumière sont visibles...

et alors ?

combien de rayons par pixel ?

- pour chaque pixel, N directions, pour chaque point trouvé, encore N directions...
- soit N^2 rayons par pixel,
- pour $\approx 1M$ pixel...
- et $N \approx 1000$,
- et pour plus de rebonds ? N^3, N^4, etc.

pas très raisonnable...

bilan

ça marche...

- mais on aimerait des erreurs moins "structurées" ?
- on voudrait mieux contrôler le temps de calcul...

on peut casser la structure des "défauts" en utilisant de l'aléatoire...