M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

November 8, 2017

Résumé

calculer une intégrale :

- en choisissant des points sur des triangles,
- en choisissant des directions sur une hémisphère...

comment ?

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x) dx$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme et x_k une réalisation.

Rappels : variable aléatoire

exemples :

- 1d,
- 2d, etc.
- sur des points, des directions, etc.
- conditionnées, lois marginales.

Rappels : densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^{b} pdf(t)dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_{a}^{b} pdf(t)dt$$

ou $\mathbb{P}$ est la probabilité de la variable aléatoire x, et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x.

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Rappels : densité de probabilité

propriétés :

$$\int pdf(t)dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout t}$$

- pour une variable aléatoire uniforme x, $pdf(x) = constante$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- sinon, pdf(x) prend une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance :

espérance de x, noté

$$E(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)\, pdf(x)\, dx \approx \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire "décrite" par $pdf(x)$, une densité de probabilité. $pdf(x) = \frac{1}{|D|}$, pour une variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) dx$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) dx$ ...

posons $g(x) = f(x)/pdf(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{x \in D} g(x) pdf(x) dx = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x) dx \equiv I$$

$$E(g(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)} \equiv I$$

Intégration numérique : exemple

on veut connaitre :

$$I = \int_{s \in S} L_e(s, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_o) G(p, s) ds, \text{avec } \vec{\omega} = s - p$$

à la place on calcule : $J = \int_{s \in S} L_e(s, -\vec{\omega})(\dots) \frac{1}{pdf(s)} ds,$

$$E(J) = \int_{s \in S} L_e(s, -\vec{\omega})(\dots) \frac{1}{pdf(s)} pdf(s) ds \equiv I$$

$$E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} L_e(s_k, -\vec{\omega}_k)(\dots) \frac{1}{pdf(s_k)} \approx I$$

exemple : éclairage direct efficace

et $pdf(s_k)$?

- cf cm précédent, choisir un point dans un triangle,
- cf GI Compendium, eq 18
- $\beta = (1 - u_2)\sqrt{u_1}$
- $\gamma = u_2\sqrt{u_1}$
- avec u_1, u_2 valeurs aléatoires $\in [0..1]$
- $s(\beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma)a + \beta b + \gamma c$
- et $pdf(s) = \frac{1}{\text{Aire triangle abc}}$
- et avec plusieurs sources / triangles ?

Intégration numérique : exemple

éclairage indirect :

- calculer la luminance incidente sur les autres directions ...
- $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega})(...)d\omega$,
- avec $\Omega = \Omega^{+} - \Omega_S$

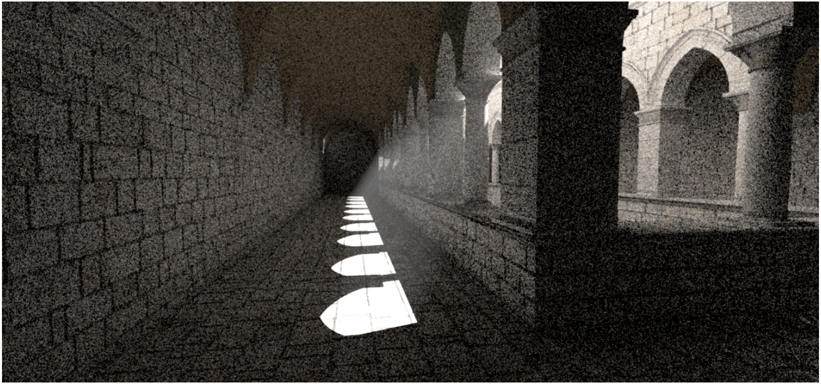
$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

exemple : éclairage indirect

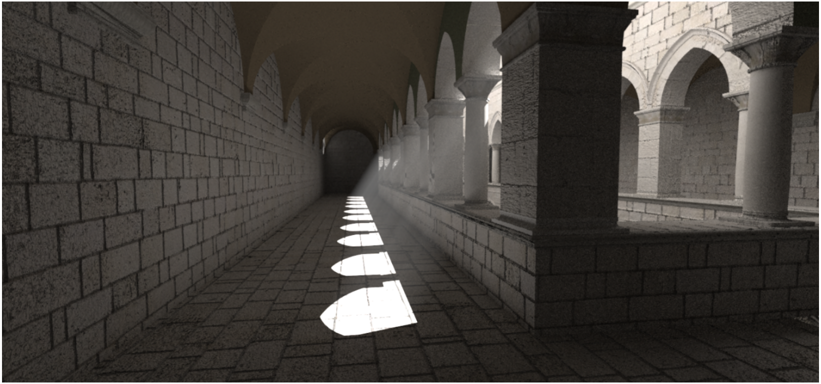
et $pdf(\vec{\omega})$?

- cf cm précédent, choisir une direction sur l'hémisphère,
- cf GI Compedium, eq 34
- $\cos\theta = u_1$
- $\phi = 2\pi u_2$
- $\vec{\omega} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$
- avec $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$,
- avec u_1, u_2 valeurs aléatoires $\in [0..1]$
- et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$

exemple :



exemple :



et alors ?

on peut calculer l'image...

- mais il reste des défauts,
- du bruit, etc.
- comment améliorer la qualité du résultat ?

Monte Carlo

l'estimateur $\hat{I}$ n'est qu'une approximation de I :

- quelle est sa qualité ?
- comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que $\hat{I}$ converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :
pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

Variance

on mesure la qualité de $\hat{I}$ en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Faire mieux ...

2 solutions :

- augmenter le nombre d'échantillons,
- *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?