M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

November 22, 2012

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x)dx$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme et x_k une réalisation.

Rappels : variable aléatoire

exemples :

- 1d,
- 2d, etc.
- sur des points, des directions, etc.
- conditionnées, lois marginales.

Rappels : densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^{b} pdf(t)dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_{a}^{b} pdf(t)dt$$

ou $\mathbb{P}$ est la probabilité de la variable aléatoire x, et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x.

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Rappels : densité de probabilité

proprietés :

$$\int pdf(t)dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout t}$$

- pour une variable aléatoire uniforme x, $pdf(x) = constante$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- sinon, pdf(x) prend une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance :

espérance de x, noté

$$E(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)\, pdf(x)\, dx \approx \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire "décrite" par $pdf(x)$, une densité de probabilité. $pdf(x) = \frac{1}{|D|}$, pour une variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) dx$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) dx$ ...

posons $g(x) = f(x)/pdf(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{x \in D} g(x) pdf(x) dx = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x) dx \equiv I$$

$$E(g(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)} \equiv I$$

Intégration numérique : exemple

éclairage direct :

on veut connaitre : $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} L_i(p, \vec{\omega})(...)d\omega$,

à la place on calcule : $J = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p,\vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} d\omega$,

$$I = E(J) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p, \vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} pdf(\vec{\omega}) d\omega$$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega_s|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω_s.

Intégration numérique : exemple

éclairage indirect :

- calculer l'énergie incidente sur les autres directions ...
- $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega})(...)d\omega,$
- avec $\Omega = \Omega^+ - \Omega_S$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω (toutes les directions ne voient pas une source de lumière).

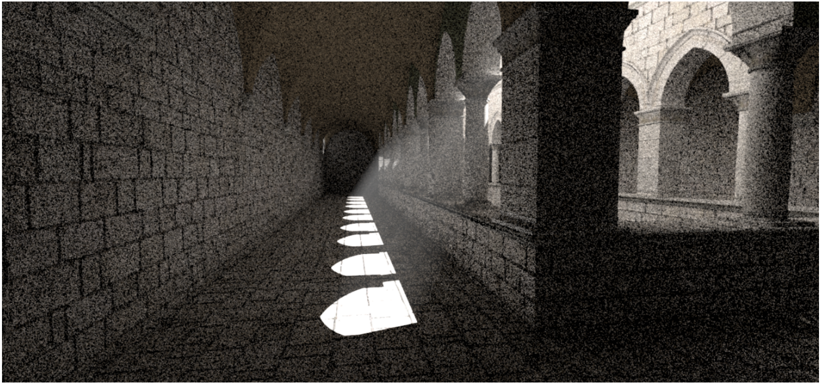
et alors ?

c'est la même chose ?

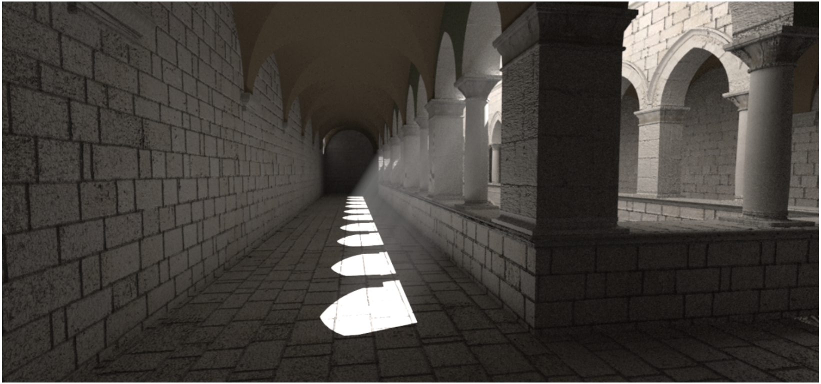
- l'intégrale est la même, la méthode de calcul aussi, ...
- qu'est ce qui change ?

on ne "travaille" pas sur le même ensemble de directions.

Exemple :



Exemple :



et alors ?

générer N directions $\vec{\omega}$ aléatoires uniformes :

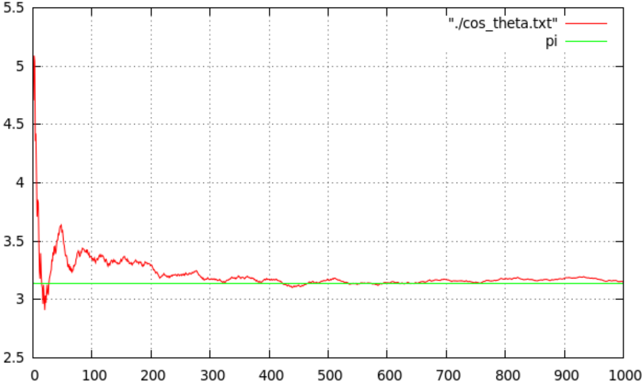
- par rapport à Ω_S, Ω, Ω^+ ?

quelle est la qualité de l'estimation ?

- elle varie en fonction de N,
- elle varie avec $pdf(\vec{\omega})$.

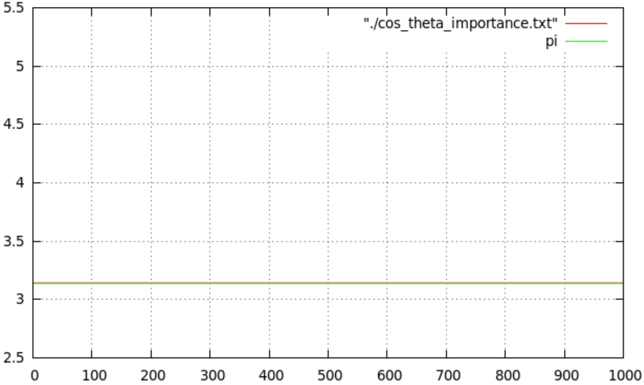
pourquoi ?

exemple : $\int_{\vec{\omega}\in\Omega} \cos\theta d\omega = \pi$



calculé avec $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$

exemple : $\int_{\vec{\omega}\in\Omega} \cos\theta d\omega = \pi$



calculé avec $pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos\theta}{\pi}$

exemple : réalisation...

```
float resultat= 0.f;
for(int i= 1; i <= N; i++)
{
    // generer une direction aleatoire sur l'hemisphere
    // et determiner la probabilite associee.
    float pdf;
    gk::Vector omega= sample(&pdf);

    // evaluer la fonction pour la direction choisie.
    float valeur= cos_theta(omega);

    // accumuler le resultat.
    resultat= resultat + valeur / pdf;

    // affiche l'estimation
    printf("%d␣%f\n", i, resultat / (float) i);
}
```

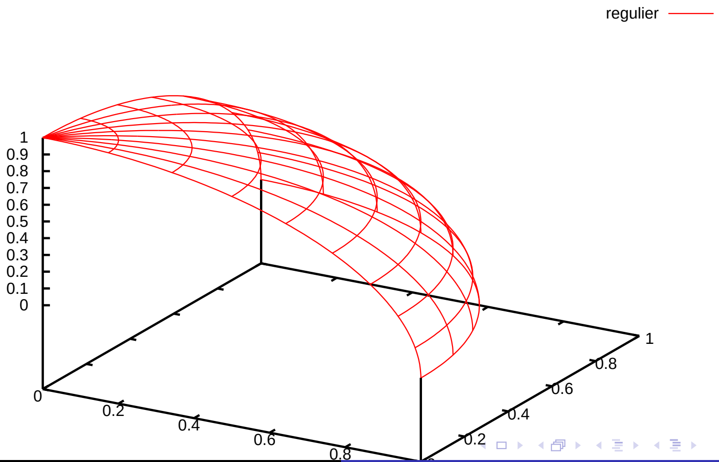
Générer des directions uniformes sur Ω^+

générer des directions uniformes sur l'(hemi-) sphère :

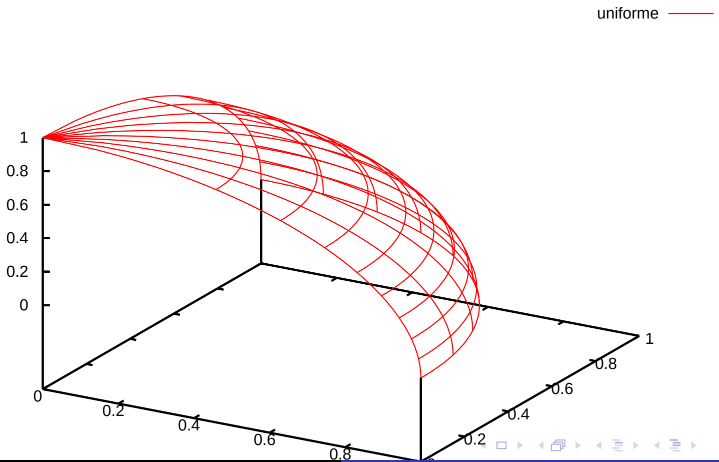
- utiliser 2 nombres aléatoires : $u_1 \in [0\ 1]$, $u_2 \in [0\ 1]$,
- $\theta \in [0\ \pi/2] = u_1 \cdot \pi/2$,
- $\phi \in [0\ 2\pi] = u_2 \cdot 2\pi$,
- est-ce que la direction (θ, ϕ) est uniforme sur la surface de l'(hemi-) sphère ?

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemple : tirage régulier en θ, ϕ



Exemple : tirage uniforme



générer des directions uniformes : comment ?

et alors ?

- quelle est la relation entre $d\omega$ et $d\theta$, $d\phi$?
- elle n'est pas linéaire ...

comment choisir θ, ϕ pour avoir $d\omega =$ constante, ou plutot $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$?

Inversion de la fonction de répartition (notions)

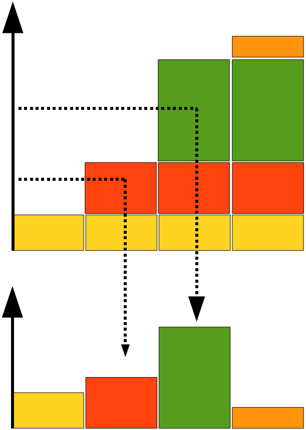
comment déformer / transformer les valeurs aléatoires uniformes u_1, u_2, etc. pour obtenir la *pdf* voulue ?

exemple discret :

- 4 valeurs possibles, p_1, p_2, p_3, p_4, définissent la *pdf*,
- probabilité de choisir p_1, p_2, p_3, p_4 ?

application directe de la définition : $\mathbb{P}(x < b) = \int_0^b pdf(t)dt$.

Exemple :



Inversion de la fonction de répartition (notions)

- tirage d'un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1,
- trouver la valeur p_i correspondante.

Inversion de la fonction de répartition (notions)

algorithme :

- construire la fonction de répartition, $\mathbb{C}$, en utilisant toutes les valeurs p_i (+ normaliser $\mathbb{C}$),
- déterminer $x_i = \mathbb{C}^{-1}(u_1)$:
- chercher la valeur de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C}(x_i) < u_1 < \mathbb{C}(x_{i+1})$

remarque :

algorithme correct en dimension 2, 3, etc..

Inversion de la fonction de répartition (notions)

dans certains cas :

- calcul direct de $\mathbb{C}^{-1}$,
- déterminer comment transformer les u_i pour "produire" des échantillons avec la *pdf* voulue.

cf. "Global Illumination Compendium", eq. 30, 34, 35, 36...

Inversion analytique : résultat

cf. "Global Illumination Compendium", eq 34

$pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$:

- u_1, u_2 nombres aléatoires uniformes,
- $\phi = 2\pi \cdot u_1$,
- $\theta = \cos^{-1}(u_2)$,
- $x = \cos(2\pi \cdot u_1)\sqrt{1 - u_2^2}$,
- $y = \sin(2\pi \cdot u_1)\sqrt{1 - u_2^2}$,
- $z = u_2$,

et alors ?

on peut calculer l'image...

- mais il reste des défauts,
- du bruit, etc.
- comment améliorer la qualité du résultat ?

Monte Carlo

l'estimateur $\hat{I}$ n'est qu'une approximation de I :

- quelle est sa qualité ?
- comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que $\hat{I}$ converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :

pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

Variance

on mesure la qualité de $\hat{I}$ en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Faire mieux ...

2 solutions :

- augmenter le nombre d'échantillons,
- *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?

Réduction de variance

intuition :
pour N échantillons, la qualité de $\hat{I}$ dépend de la manière de choisir les échantillons ...
c'est à dire de la densité de x : $pdf(x)$.

mieux choisir les échantillons :

- solution de base : $pdf(x) = constante$,
- meilleure solution : choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle à la fonction intégrée ?

"Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering"
E. Veach, L.J. Guibas, siggraph 1995

Choisir une *pdf*

choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_r) |\cos\theta|$$

- $L_i(p, \vec{\omega})$?
- $f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_r)$?
- $\cos\theta$?
- le produit des 3 ?

Choisir une *pdf*

- $L_i(p, \vec{\omega})$?
- $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$: connaissant $\vec{\omega}_r$, se réduit à $k_d + k_s \cdot \cos^m \theta_h$,
- $\cos\theta$: le plus simple,
- le produit des 3 : le plus compliqué, mais *serait* le plus efficace.

Utiliser $\cos\theta$ comme *pdf*

- la pdf doit être positive, pour les valeurs utilisées,
- la pdf doit être normalisée, pour les valeurs utilisées :

$$\int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} pdf(\vec{\omega})d\omega = 1$$

$\cos\theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
constante de normalisation k telle que :

$$\frac{1}{k}\int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} \cos\theta d\omega = 1$$

ou $k = \int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} \cos\theta d\omega$.

Utiliser $\cos\theta$ comme *pdf*

$$k = \int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} \cos\theta d\omega$$

en coordonnées polaires (θ, ϕ) on a : $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$
d'ou :

$$k = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi$$

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos\theta}{k} = \frac{\cos\theta}{\pi}$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 35.

Utiliser $\cos^m \theta_h$ comme *pdf*

même démarche :

- $\cos^m \theta_h$ est bien positif pour $0 < \theta_h < \pi/2$,
- $k = \int_{\vec{h} \in \Omega^+} \cos^m \theta_h dh = \frac{2\pi}{m+1}$,

$$pdf(\vec{h}) = \frac{\cos^m \theta_h}{k} = \frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta_h$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 36.

et alors ?

selon la *pdf* choisie, on peut simplifier au moins un terme :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_r) |\cos\theta|$$

avec $pdf(\vec{\omega}) = \cos\theta/\pi$:

$$\pi L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_r)$$

générer des échantillons (des directions) $\vec{\omega} \propto \cos\theta$?

et alors ?

avec $pdf(\vec{h}) = \frac{m+1}{2\pi}\cos^m\theta_h$
et $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) = k_d + k_s\cos^m\theta_h$?

générer des échantillons (des directions) $\vec{h} \propto \cos^m\theta_h$?

et alors ?

on veut calculer :

$$L(p, \vec{\omega}_r) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} \frac{L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos\theta|}{pdf(\vec{\omega})} d\omega$$

mais on connait $\vec{h}$, et $pdf(\vec{h})$?

- $\vec{\omega} = refl(\vec{\omega}_r, \vec{h})$
- $pdf(\vec{\omega}) = \frac{pdf(\vec{h})}{4(\vec{\omega}_r \cdot \vec{h})}$
  ($\vec{\omega}$ est symétrique de $\vec{\omega}_r$ par rapport à $\vec{h}$).

et alors ?

$$\begin{aligned}
L(p,\vec{\omega}_r) &= \int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} L_i(p,\vec{\omega})\,(k_d + k_s\cos^m\theta_h)\cos\theta d\omega \\
&= L_d(p,\vec{\omega}_r) + L_s(p,\vec{\omega}_r) \\
L_d(p,\vec{\omega}_r) &= \int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} L_i(p,\vec{\omega}) k_d \cos\theta d\omega \\
L_s(p,\vec{\omega}_r) &= \int_{\vec{\omega}\in\Omega^+} L_i(p,\vec{\omega}) k_s \cos^m\theta_h \cos\theta d\omega
\end{aligned}$$

et alors ?

on choisit une *pdf* adaptée à chaque cas :

- $pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos\theta}{\pi}$ pour L_d,
- $pdf(\vec{\omega}) = \frac{pdf(\vec{h})}{4(\vec{\omega}_r \cdot \vec{h})}$ pour L_s, et $pdf(\vec{h}) \propto \cos^m \theta_h$, $\vec{\omega} = refl(\vec{\omega}_r, \vec{h})$.

résultat :

$$L_d(p, \vec{\omega}_r) = \frac{1}{N} \pi k_d \sum_{k=1}^{k=N} L_i(p, \vec{\omega}_k)$$

$$L_s(p, \vec{\omega}_r) = \frac{1}{N} \frac{2\pi}{m+1} k_s \sum_{k=1}^{k=N} 4(\vec{\omega}_r \cdot \vec{h}_k) L_i(p, \vec{\omega}_k) \, |\cos\theta_k|$$

Eclairage direct

éclairage direct :

- source sphérique,
- N échantillons par source,
- N échantillons au total.

Eclairage direct : 1 source sphérique

principe (Monte Carlo) :

- découper le domaine Ω_S,
- choisir une densité de probabilité,
- générer des directions vers la source,
- évaluer l'énergie réfléchie,
- calculer la moyenne des estimateurs.

Eclairage direct : 1 source sphérique

générer des directions vers la source :

générer des directions dans le cone d'angle θ_{max} dans lequel est visible la source de lumière.

cf. "Global Illumination Compendium", eq 34, 35.

et avec N sources sphériques ?

Eclairage direct : M sources sphériques

plusieurs sources :

- on veut estimer l'éclairage direct avec 1 seule direction / échantillon,
- au lieu de travailler sur l'ensemble de directions de chaque source,
- on travaille sur l'union de ces directions Ω_S,
- il *suffit* d'en choisir une...
- comment ?

plusieurs manières de choisir ? laquelle est la meilleure ?