

M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

October 19, 2011

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme et x_k une réalisation.

Rappels : variable aléatoire

exemples :

- ▶ 1d,
- ▶ 2d, etc.
- ▶ sur des points, des directions, etc.
- ▶ conditionnées, lois marginales.

Rappels : densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^b pdf(t) dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_a^b pdf(t) dt$$

ou $\mathbb{P}$ est la probabilité de la variable aléatoire x , et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x .

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Rappels : densité de probabilité

propriétés :

$$\int pdf(t) dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout } t$$

- ▶ pour une variable aléatoire uniforme x , $pdf(x) = \text{constante}$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- ▶ sinon, $pdf(x)$ prend une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance :

espérance de x , noté

$$E(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) d\mu \approx \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire "décrite" par $pdf(x)$, une densité de probabilité. $pdf(x) = \frac{1}{|D|}$, pour une variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) d\mu \dots$

posons $g(x) = f(x)/pdf(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{x \in D} g(x) pdf(x) d\mu = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x) d\mu \equiv I$$

$$E(g(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)} \equiv I$$

Intégration numérique : exemple

éclairage direct :

on veut connaitre : $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} L_i(p, \vec{\omega})(...) d\omega$,

à la place on calcule : $J = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p, \vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} d\omega$,

$$I = E(J) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p, \vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} pdf(\vec{\omega}) d\omega$$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega_s|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω_s .

Intégration numérique : exemple

éclairage indirect :

- ▶ calculer l'énergie incidente sur les autres directions ...
- ▶ $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega})(...) d\omega,$
- ▶ avec $\Omega = \Omega^+ - \Omega_S$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{pdf(\vec{\omega})}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω (toutes les directions ne voient pas une source de lumière).

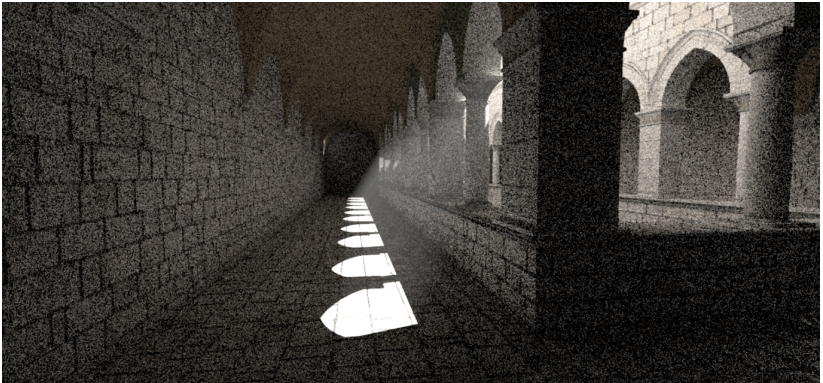
et alors ?

c'est la même chose ?

- ▶ l'intégrale est la même, la méthode de calcul aussi, ...
- ▶ qu'est ce qui change ?

on ne "travaille" pas sur le même ensemble de directions.

Exemple :



Exemple :



et alors ?

générer N directions $\vec{\omega}$ aléatoires uniformes :

- ▶ par rapport à Ω_S , Ω , Ω^+ ?

quelle est la qualité de l'estimation ?

- ▶ elle varie en fonction de N ,
- ▶ elle varie avec $pdf(\vec{\omega})$.

pourquoi ?

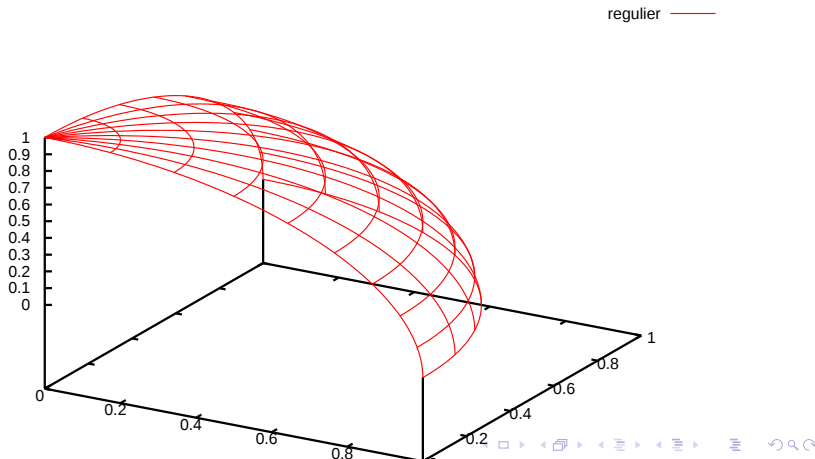
Générer des directions uniformes sur Ω^+

générer des directions uniformes sur l'(hemi-) sphère :

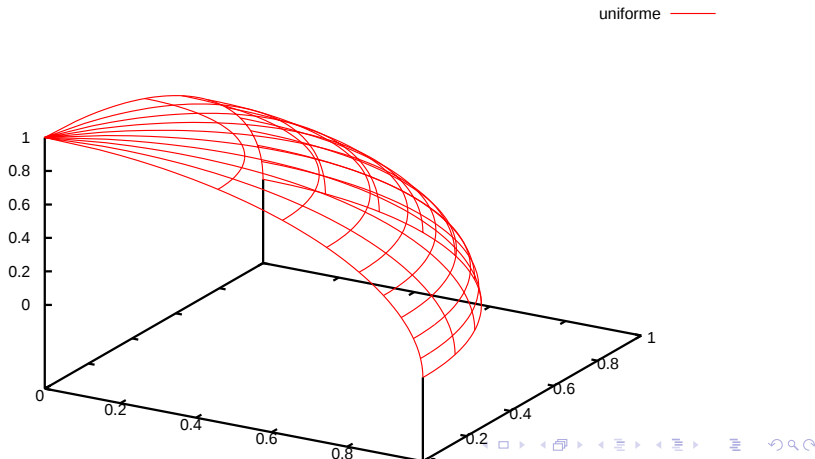
- ▶ utiliser 2 nombres aléatoires : $u_1 \in [0, 1]$, $u_2 \in [0, 1]$,
- ▶ $\theta \in [0, \pi/2] = u_1 \cdot \pi/2$,
- ▶ $\phi \in [0, 2\pi] = u_2 \cdot 2\pi$,
- ▶ est-ce que la direction (θ, ϕ) est uniforme sur la surface de l'(hemi-) sphère ?

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exemple : tirage régulier en θ, ϕ



Exemple : tirage uniforme



générer des directions uniformes : comment ?

et alors ?

- ▶ quelle est la relation entre $d\omega$ et $d\theta$, $d\phi$?
- ▶ elle n'est pas linéaire ...

comment choisir θ, ϕ pour avoir $d\omega = \text{constante}$, ou plutôt
 $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$?

Inversion de la fonction de répartition (notions)

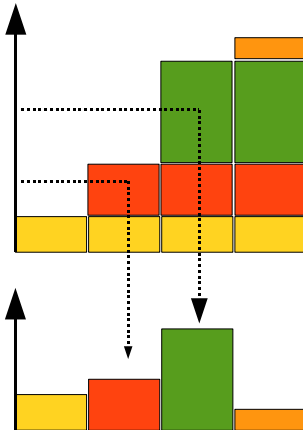
comment déformer / transformer les valeurs aléatoires uniformes u_1, u_2 , etc. pour obtenir la *pdf* voulue ?

exemple discret :

- ▶ 4 valeurs possibles, p_1, p_2, p_3, p_4 , définissent la *pdf*,
- ▶ probabilité de choisir p_1, p_2, p_3, p_4 ?

application directe de la définition : $\mathbb{P}(x < b) = \int_0^b pdf(t)dt.$

Exemple :



Inversion de la fonction de répartition (notions)

- ▶ tirage d'un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1,
- ▶ trouver la valeur p_i correspondante.

Inversion de la fonction de répartition (notions)

algorithme :

- ▶ construire la fonction de répartition, $\mathbb{P}$, en utilisant toutes les valeurs p_i (+ normaliser $\mathbb{P}$),
- ▶ déterminer $x_i = \mathbb{P}^{-1}(u_1)$:
- ▶ chercher la valeur de $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(x_i) < u_1 < \mathbb{P}(x_{i+1})$

remarque :

algorithme correct en dimension 2, 3, etc..

Inversion de la fonction de répartition (notions)

dans certains cas :

- ▶ calcul direct de $\mathbb{P}^{-1}$,
- ▶ déterminer comment transformer les u_i pour "produire" des échantillons avec la *pdf* voulue.

cf. "Global Illumination Compendium", eq. 30, 34, 35, 36...

Inversion analytique : résultat

cf. "Global Illumination Compendium", eq 34

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi} :$$

- ▶ u_1, u_2 nombres aléatoires uniformes,
- ▶ $\phi = 2\pi \cdot u_1$,
- ▶ $\theta = \cos^{-1}(u_2)$,
- ▶ $x = \cos(2\pi \cdot u_1) \sqrt{1 - u_2^2}$,
- ▶ $y = \sin(2\pi \cdot u_1) \sqrt{1 - u_2^2}$,
- ▶ $z = u_2$,

et alors ?

on peut calculer l'image...

- ▶ mais il reste des défauts,
- ▶ du bruit, etc.
- ▶ comment améliorer la qualité du résultat ?

Monte Carlo

l'estimateur $\hat{I}$ n'est qu'une approximation de I :

- ▶ quelle est sa qualité ?
- ▶ comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que $\hat{I}$ converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :

pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

Variance

on mesure la qualité de $\hat{I}$ en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Faire mieux ...

2 solutions :

- ▶ augmenter le nombre d'échantillons,
- ▶ *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?

Réduction de variance

intuition :

pour N échantillons, la qualité de $\hat{I}$ dépend de la manière de choisir les échantillons ...

c'est à dire de la densité de x : $pdf(x)$.

mieux choisir les échantillons :

- ▶ solution de base : $pdf(x) = \text{constante}$,
- ▶ meilleure solution : choisir une pdf (à peu près) proportionnelle à la fonction intégrée ?

“Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering”

E. Veach, L.J. Guibas, siggraph 1995

Choisir une *pdf*

choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos \theta|$$

- ▶ $L_i(p, \vec{\omega})$?
- ▶ $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$?
- ▶ $\cos \theta$?
- ▶ le produit des 3 ?

$pdf(\vec{\omega}) \propto \cos \theta$
 $pdf(\vec{h}) \propto \cos^m \theta_h$
et alors ?

Choisir une *pdf*

- ▶ $L_i(p, \vec{\omega})$?
- ▶ $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$: connaissant $\vec{\omega}_r$, se réduit à $k_d + k_s \cdot \cos^m \theta_h$,
- ▶ $\cos \theta$: le plus simple,
- ▶ le produit des 3 : le plus compliqué, mais *serait* le plus efficace.

Utiliser $\cos \theta$ comme pdf

- ▶ la pdf doit être positive, pour les valeurs utilisées,
- ▶ la pdf doit être normalisée, pour les valeurs utilisées :

$$\int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} pdf(\vec{\omega}) d\omega = 1$$

$\cos \theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
constante de normalisation k telle que :

$$\frac{1}{k} \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} \cos \theta d\omega = 1$$

ou $k = \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} \cos \theta d\omega$.

Utiliser $\cos \theta$ comme pdf

$$k = \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} \cos \theta d\omega$$

en coordonnées polaires (θ, ϕ) on a : $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$
d'où :

$$k = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi$$

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos \theta}{k} = \frac{\cos \theta}{\pi}$$

cf. “Global Illumination Compendium”, eq 30, 35.

Utiliser $\cos^m \theta_h$ comme pdf

même démarche :

- ▶ $\cos^m \theta_h$ est bien positif pour $0 < \theta_h < \pi/2$,
- ▶ $k = \int_{\vec{h} \in \Omega^+} \cos^m \theta_h d\vec{h} = \frac{2\pi}{m+1}$,

$$pdf(\vec{h}) = \frac{\cos^m \theta_h}{k} = \frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta_h$$

cf. “Global Illumination Compendium”, eq 30, 36.

et alors ?

selon la pdf choisie, on peut simplifier au moins un terme :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos \theta|$$

avec $pdf(\vec{\omega}) = \cos \theta / \pi$:

$$\pi L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$$

générer des échantillons (des directions) $\vec{\omega} \propto \cos \theta$?

$$\begin{aligned} pdf(\vec{\omega}) &\propto \cos \theta \\ pdf(\vec{h}) &\propto \cos^m \theta_h \\ \text{et alors ?} \end{aligned}$$

et alors ?

$$\begin{aligned} \text{avec } pdf(\vec{h}) &= \frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta_h \\ \text{et } f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) &= k_d + k_s \cos^m \theta_h ? \end{aligned}$$

générer des échantillons (des directions) $\vec{h} \propto \cos^m \theta_h$?

et alors ?

on veut calculer :

$$L(p, \vec{\omega}_r) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} \frac{L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos \theta|}{pdf(\vec{\omega})} d\omega$$

mais on connaît $\vec{h}$, et $pdf(\vec{h})$?

► $\vec{\omega} = \text{refl}(\vec{\omega}_r, \vec{h})$

► $pdf(\vec{\omega}) = \frac{pdf(\vec{h})}{4(\vec{\omega}_r \cdot \vec{h})}$

($\vec{\omega}$ est symétrique de $\vec{\omega}_r$ par rapport à $\vec{h}$).

et alors ?

$$L(p, \vec{\omega}_r) = L_d(p, \vec{\omega}_r) + L_s(p, \vec{\omega}_r)$$

on calcule :

$$L_d(p, \vec{\omega}_r) = \pi k_d \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} L_i(p, \vec{\omega}) d\omega$$

et

$$L_s(p, \vec{\omega}_r) = \frac{2\pi}{m+1} k_s \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} 4(\vec{\omega}_r \cdot \vec{h}) L_i(p, \vec{\omega}) |\cos \theta| d\omega$$

avec $\vec{h} \propto \cos^m \theta_h$, $\vec{\omega} = \text{refl}(\vec{\omega}_r, \vec{h})$

et $f_r() = k_d + k_s \cos^m \theta_h$

Eclairage direct

éclairage direct :

- ▶ source sphérique,
- ▶ source rectangulaire / triangulaire,
- ▶ N échantillons par source, N échantillons au total.

Eclairage direct: source sphérique

principe (Monte Carlo) :

- ▶ découper le domaine Ω_S ,
- ▶ choisir une densité de probabilité,
- ▶ générer des directions vers la source,
- ▶ évaluer l'énergie réfléchie,
- ▶ calculer la moyenne des estimateurs.

Eclairage direct: source sphérique

générer des directions vers la source :

générer des directions dans le cone d'angle θ_{max} dans lequel est visible la source de lumière.

cf. “Global Illumination Compendium”, eq 34, 35.

et avec N sources sphériques ?

Eclairage direct : source rectangulaire

principe (Monte Carlo) :

- ▶ découper le domaine Ω_S ,
- ▶ choisir une densité de probabilité,
- ▶ générer des directions vers la source,
- ▶ évaluer l'énergie réfléchie,
- ▶ calculer la moyenne des estimateurs.

même démarche, mais les “*détails*” changent...

Eclairage direct : source rectangulaire

découper le domaine Ω_S :

- ▶ existe-t-il un cône de directions pour lesquelles la source est visible ?
- ▶ solution naïve :
- ▶ générer des directions uniformément sur Ω et rejeter celles qui ne correspondent pas à la source...

Eclairage direct : source rectangulaire

faire mieux :

- ▶ travailler dans un domaine plus adapté...
- ▶ parcourir la surface de la source,
- ▶ déterminer la direction associée à un point de la source,
- ▶ vérifier que le point sur la source est visible,
- ▶ évaluer l'énergie réfléchie.

changement de domaine d'intégration : sur des points et plus sur des directions.

Eclairage direct : changer de domaine d'intégration

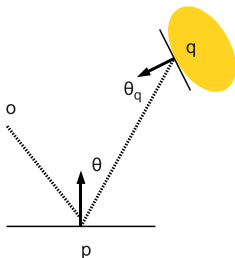
on veut calculer :

- ▶ $L_r(p, \vec{\omega}_r) = \int_{q \in A_s} L_i(p, \vec{\omega}_q) f_r(p, \vec{\omega}_q \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos \theta| \dots dq,$
- ▶ avec $q \in A_s$, l'ensemble de points de la surface de la source s ,
- ▶ et $\vec{\omega}_q$, la direction de p vers q .

quelle relation entre dq et $d\omega$?

Eclairage direct : changer de domaine d'intégration

- ▶ $d\omega = \frac{\cos \theta_q}{||pq||^2} dq$
- ▶ angle solide d'un élément de surface dq vu de p .



finir la substitution ...

Eclairage direct : changer de domaine d'intégration

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = \int_{q \in A_s} L_i(p, \vec{\omega}_q) f_r(p, \vec{\omega}_q \rightarrow \vec{\omega}_r) V(p, q) \cos \theta \frac{\cos \theta_q}{||pq||^2} dq$$

reformulation :

- ▶ avec $q \in A_s$, l'ensemble de points de la surface de la source s ,
- ▶ $\vec{\omega}_q$, la direction de p vers q ,
- ▶ $V(p, q) = 1$ si p et q sont visibles, 0 sinon.

et alors ?

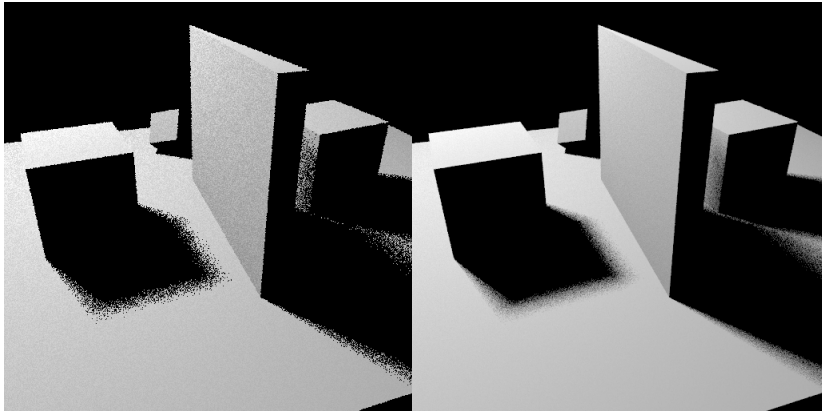
algorithme :

- ▶ pour chaque source de lumière,
- ▶ choisir N points à la surface de la source,
- ▶ vérifier que les p et q sont visibles,
- ▶ évaluer l'énergie réfléchie par chaque q ,
- ▶ finir le calcul.

choisir des points uniformément dans un triangle ?

cf. “Global Illumination Compendium”, eq 18.

exemples :



(à gauche) 1 échantillon par pixel, (à droite) 10 échantillons.

Introduction
Un peu de probabilités
Génération de directions
Monte Carlo
Réduction de variance
Application à l'éclairage direct

source sphérique
source rectangulaire / triangulaire

exemples :

