

M2-Images

Equation de rendu
et suivi de chemins

J.C. lehl

November 16, 2011

résumé des épisodes précédents...

résumé :

- ▶ méthodes de Monte Carlo...
- ▶ $L_r(p, \vec{\omega}_r) = L_e(p, \vec{\omega}_r) + L_{direct}(p, \vec{\omega}_r) + L_{indirect}(p, \vec{\omega}_r)$
- ▶

Equation de rendu

“The rendering equation”:

J.T. Kajiya, 1986

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = L_e(p, \vec{\omega}_r) + \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} L_r(q, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) \cos \theta d\omega$$

avec q point visible de p dans la direction $\vec{\omega}$.

Equation de rendu

intuition :

pourquoi s'arrêter après une seule interaction dans le calcul de $L_{indirect}(p, \vec{\omega}_r)$?

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = L_e(p, \vec{\omega}_r) + \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) \cos \theta d\omega$$

$$L_i(p, \vec{\omega}) = L_r(q, -\vec{\omega}) \text{ (rappel)}$$

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = L_e(p, \vec{\omega}_r) + \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} L_r(q, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) \cos \theta d\omega$$

avec q point visible de p dans la direction $\vec{\omega}$.

la formulation complète est récursive : $L_r(q, -\vec{\omega})$

Substitution récursive

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = L_e(p, \vec{\omega}_r) + \int_{\vec{\omega} \in \Omega^+} L_r(q, -\vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) \cos \theta d\omega$$

$$L_r(q, -\vec{\omega}) = L_e(q, -\vec{\omega}) + \int_{\vec{\omega}_1 \in \Omega^+} L_r(q_1, -\vec{\omega}_1) f_r(q, \vec{\omega}_1 \rightarrow -\vec{\omega}) \cos \theta_1 d\omega_1$$

$$L_r(q_1, -\vec{\omega}_1) = L_e(q_1, -\vec{\omega}_1) + \int_{\vec{\omega}_2 \in \Omega^+} L_r(q_2, -\vec{\omega}_2) f_r(q_1, \vec{\omega}_2 \rightarrow -\vec{\omega}_1) \cos \theta_2 d\omega_2$$

$$L_r(q_2, -\vec{\omega}_2) = \dots$$

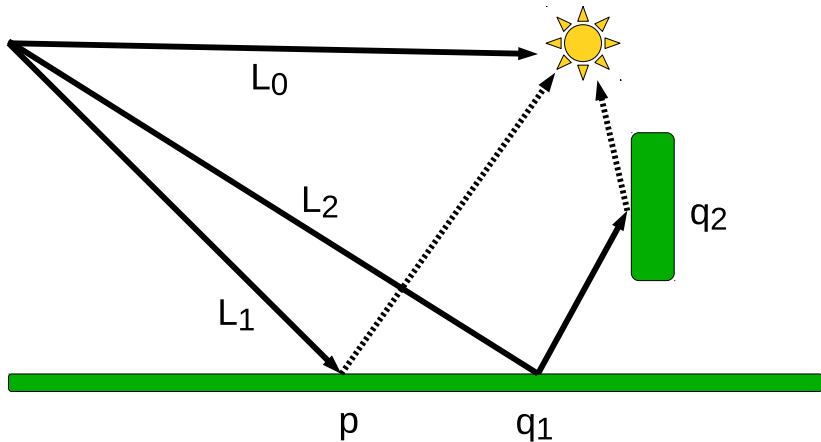
Substitution récursive ...

- ▶ "casser" la récursion,
- ▶ extraire explicitement : l'énergie émise, l'énergie émise *propagée* une fois, l'énergie émise *propagée* 2 fois, etc.
- ▶ des *chemins* qui connectent un point sur une source et l'observateur.

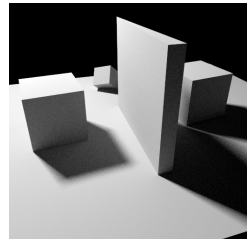
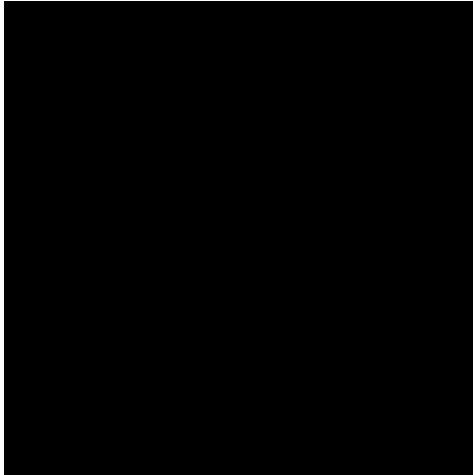
mais :

un peu pénible à écrire avec la formulation point + direction...

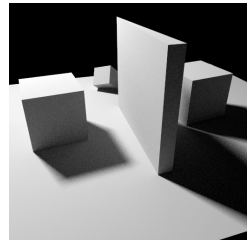
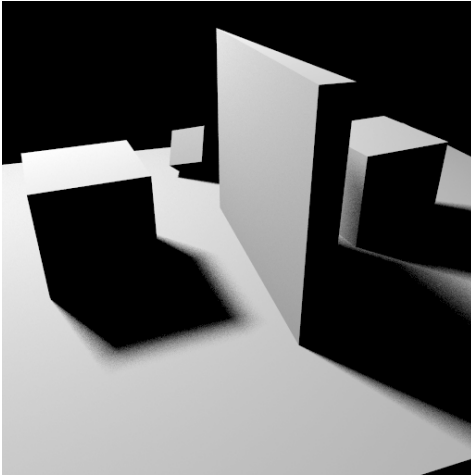
Substitution récursive ...



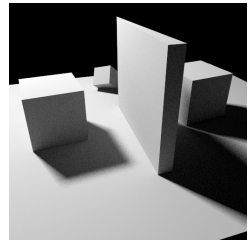
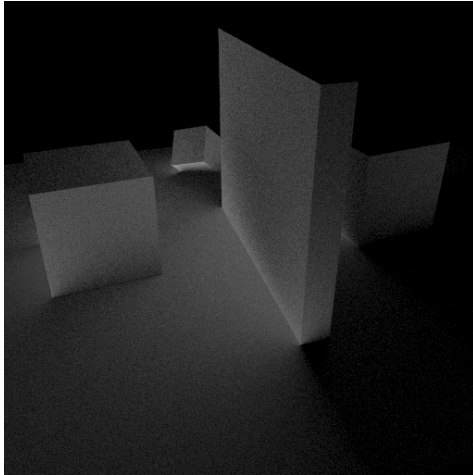
Substitution récursive : L_0



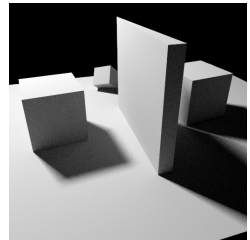
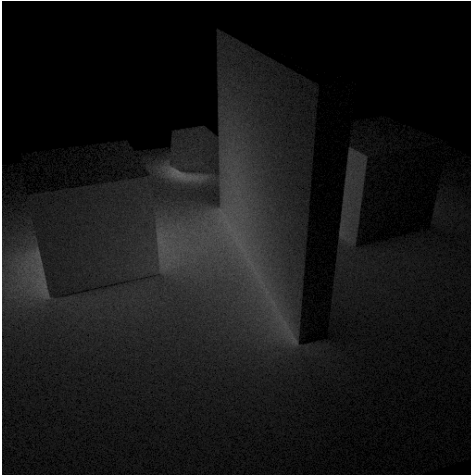
Substitution récursive : L_1



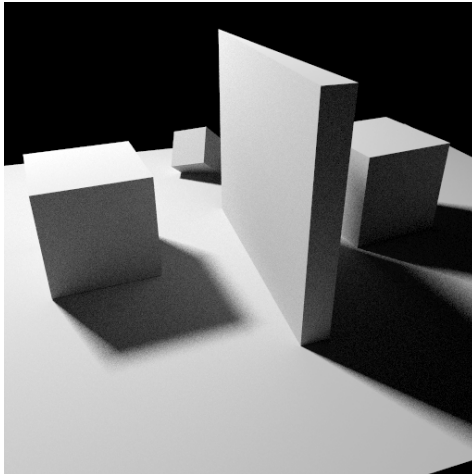
Substitution récursive : L_2



Substitution récursive : $L_3 \times 8$



Substitution récursive : $L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$



Reformulation sur les aires

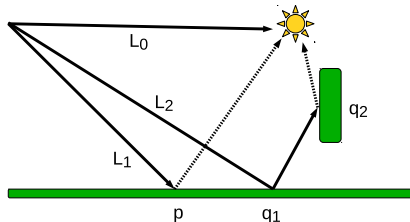
rappel : $d\omega = \frac{\cos \theta_q}{\|\vec{pq}\|^2} dq$

$$\begin{aligned} L(p, o) &= L_e(p, o) + \int_{q \in A} L(q, p) f_r(q, p, o) V(q, p) \frac{\cos \theta \cos \theta_q}{\|\vec{pq}\|^2} dq \\ &= L_e(p, o) + \int_{q \in A} L(q, p) f_r(q, p, o) G(q, p) dq \end{aligned}$$

avec $G(q, p) = V(q, p) \frac{\cos \theta \cos \theta_q}{\|\vec{pq}\|^2}$

Substitution récursive ...

- ▶ *casser* la récursion,
- ▶ extraire explicitement : l'énergie émise, l'énergie émise *propagée* une fois, l'énergie émise *propagée* 2 fois, etc.
- ▶ des *chemins* qui connectent un point sur une source et l'observateur.



Chemins (notions)

chemins :

- ▶ extrémités : un point d'une source de lumière + l'observateur,
- ▶ + "des" rebonds intermédiaires,
- ▶ L_0 = chemin (p, o) , énergie directe : pas de rebond,
- ▶ L_1 = chemin (q, p, o) , énergie indirecte : 1 rebond,
- ▶ L_2 = chemin (q_2, q_1, p, o) , 2 rebonds,
- ▶ L_3 = chemin (q_3, q_2, q_1, p, o) , 3 rebonds,
- ▶ etc.

Chemins (notions)

$$L_0(p, o) = L_e(p, o)$$

(émission directement visible)

$$L_1(q_1, p, o) = \int_{q_1 \in A} L_0(q_1, p) f_r(q_1, p, o) G(q_1, p) dq_1$$

(éclairage direct)

$$L_2(q_2, q_1, p, o) = \int_{q_2 \in A} L_1(q_2, q_1) f_r(q_2, q_1, p) G(q_2, q_1) dq_2$$

(éclairage indirect)

$$L(\dots, q_2, q_1, p, o) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(\bar{p}_k)$$

Chemins (notions)

algorithme :

- ▶ pour chaque longueur de chemin :
- ▶ générer les k points du chemin aléatoirement sur les surfaces de la scène,
- ▶ calculer l'énergie réfléchie par p vers o .

quelques détails à régler :

- ▶ $pdf(q_0)$? $pdf(q_1)$? $pdf(q_k)$?
- ▶ quelle pdf pour le chemin complet ?
- ▶ utiliser Monte Carlo pour estimer L_0, L_1, L_2 , etc. ?
- ▶ ou utiliser Monte Carlo pour estimer $L = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$?

Quelques détails à régler ...

2 choix :

- ▶ calculer les termes L_k séparément et tout sommer,
- ▶ calculer directement L .

mais : changement d'espace de travail

point q_{k+1} visible depuis q_k , ou chemin de k rebonds ?
(dimension 2 ou dimension $2k$?)

les calculs de *pdf* dépendent de l'espace de travail.

Quelques détails à régler ...

L est une somme infinie :

comment tronquer cette somme aux N premiers termes sans introduire une erreur systématique ?

$$\hat{L} = \sum_{k=0}^N L_k \approx L = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$$

idée :

choix aléatoire de N au lieu d'une valeur fixée à l'avance.

Roulette Russe

autre outil statistique :

ne pas calculer tous les termes, mais sans introduire d'erreur systématique ...

idée :

ne pas fixer N , mais le choisir “statistiquement”

“Particle Transport and Image Synthesis”

J. Arvo, D. Kirk, 1990.

Roulette russe - intuition

choisir dans quel cas ne pas faire “les calculs” :
et supposer que la valeur non calculée est nulle ($= 0$).

utiliser un test aléatoire au lieu d'un test déterministe :

- ▶ variable aléatoire avec 2 valeurs :
- ▶ $pdf(\text{“calculer”}) = 1 - q$,
- ▶ $pdf(\text{“nul”}) = q$
- ▶ avec $0 < q < 1$.

Roulette russe

ne pas changer l'espérance du résultat :

$$E(RR(x)) = q \cdot 0 + (1 - q) \cdot \frac{x}{1-q} \equiv E(x)$$

on peut choisir de ne pas calculer un résultat si les résultats effectivement calculés sont pondérés par la probabilité de ne pas avoir fait le calcul ...

(exercice : reformuler cette phrase sans utiliser de négations ...)

Roulette russe - application à la longueur d'un chemin

$$L(p, o) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(p, o)$$
$$L(p, o) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{L_k(p, o)}{1 - q} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{L_k(p, o)}{q} \equiv 0$$

Applications

Applications possibles :

- ▶ presque partout !
- ▶ éviter de lancer certains rayons d'ombre si la contribution de la source est très faible,
- ▶ éviter de construire un chemin après N rebonds, si la contribution est très faible,
- ▶ ...

Terminer un chemin après N rebonds

reformulation :

$$\begin{aligned} L(p, o) \approx & L_0(p, o) + L_1(p, o) + \dots + L_{N-1}(p, o) \\ & + \frac{1}{1-q} \left(L_N(p, o) + \frac{1}{1-q} \left(L_{N+1}(p, o) + \frac{1}{1-q} (\dots) \right) \right) \end{aligned}$$

en pratique :

- ▶ multiplier chaque "terme" calculé par un poids : $w_k \cdot L_k(p, o)$,
- ▶ si le terme doit être calculé : $w_k = w_{k-1}$,
- ▶ sinon, $w_k = \frac{1}{1-q} \cdot w_{k-1}$, et faire le calcul si $u > q$,
- ▶ avec $w_0 = 1$ et u un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Suivi de chemins

suivi de chemins :

- ▶ générer un rayon pour le pixel (x, y) ,
- ▶ pour chaque rebond :
- ▶ déterminer le point visible,
- ▶ évaluer l'éclairage direct avec 1 seul rayon pour l'ensemble des **SOURCES**, (choix du point sur une source en fonction de l'énergie émise ?)
- ▶ évaluer l'éclairage indirect dans une seule direction,
(choix de la direction du rebond ?)
- ▶ recommencer tant que la longueur du chemin est trop petite
(+ roulette russe)