M2-Images

Eclairage direct et indirect

J.C. Iehl

October 29, 2010

résumé des épisodes précédents ...

résumé :

- intégration numérique de $\int_{x \in D} f(x)dx$,
- choisir un domaine sur lequel "travailler",
- choisir une densité de probabilité adaptée,
- générer des échantillons (des directions, des points) distribués selon la densité de probabilité ?
- calculer l'espérance (la moyenne) de $f(x_k)/pdf(x_k)$.

choisir des échantillons distribués selon une densité de probabilité ?

générer des directions uniformes

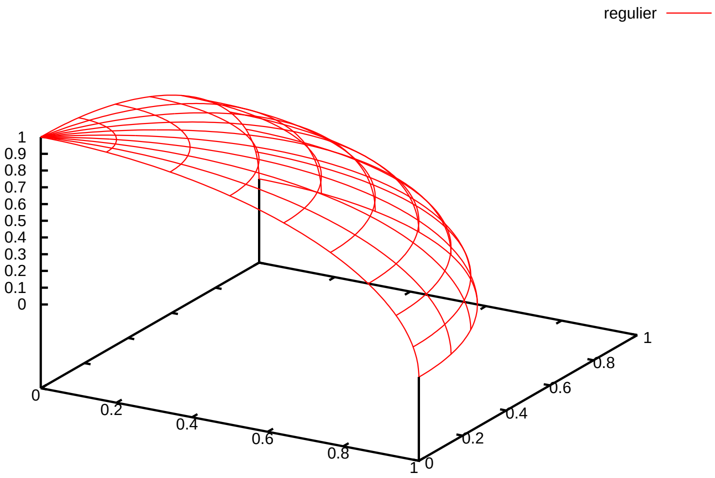
générer des directions uniformes sur l'(hemi-) sphère :

- générateur de nombre aléatoires : $u_k \in [0\ 1]$,
- utiliser 2 nombres aléatoires : u_1, u_2,
- $\theta \in [0\ \pi/2] = u_1 \cdot \pi/2$,
- $\phi \in [0\ 2\pi] = u_2 \cdot 2\pi$,
- est-ce que la direction (θ, ϕ) est uniforme sur la surface de l'(hemi-) sphère ?

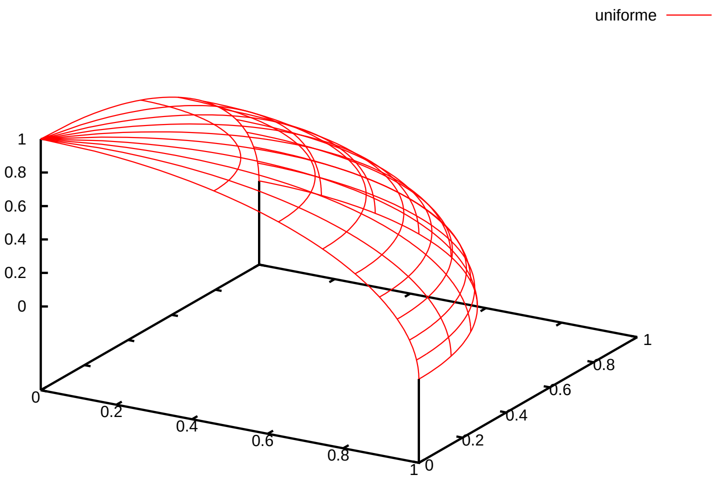
rappel :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemple : tirage régulier en θ, ϕ



Exemple : tirage uniforme



générer des directions uniformes : comment ?

et alors ?

- quelle est la relation entre $d\omega$ et $d\theta$, $d\phi$?
- elle n'est pas linéaire ...

comment choisir θ, ϕ pour avoir $d\omega =$ constante, ou plutot $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$?

Inversion de la fonction de répartition (notions)

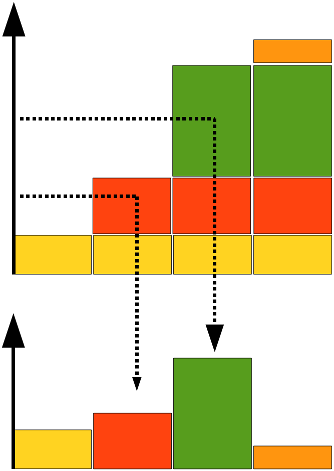
comment déformer / transformer les valeurs aléatoires uniformes u_1, u_2, etc. pour obtenir la *pdf* voulue ?

exemple discret :

- 4 valeurs possibles, p_1, p_2, p_3, p_4, définissent la *pdf*,
- probabilité de choisir p_1, p_2, p_3, p_4 ?

application directe de la définition : $\mathbb{P}(x < b) = \int_0^b pdf(t)dt$.

Exemple :



Inversion de la fonction de répartition (notions)

- tirage d'un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1,
- trouver la valeur p_i correspondante.

Inversion de la fonction de répartition (notions)

algorithme :

- construire la fonction de répartition, $\mathbb{P}$, en utilisant toutes les valeurs p_i (+ normaliser $\mathbb{P}$),
- déterminer $x_i = \mathbb{P}^{-1}(u_1)$:
- chercher la valeur de $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(x_i) < u_1 < \mathbb{P}(x_{i+1})$

remarque :

algorithme correct en dimension 2, 3, etc..

Inversion de la fonction de répartition (notions)

dans certains cas :

- calcul direct de $\mathbb{P}^{-1}$,
- déterminer comment transformer les u_i pour "produire" des échantillons avec la *pdf* voulue.

cf. "Global Illumination Compendium" eq. 30, 34, 35, 36 ...

Inversion analytique : résultat

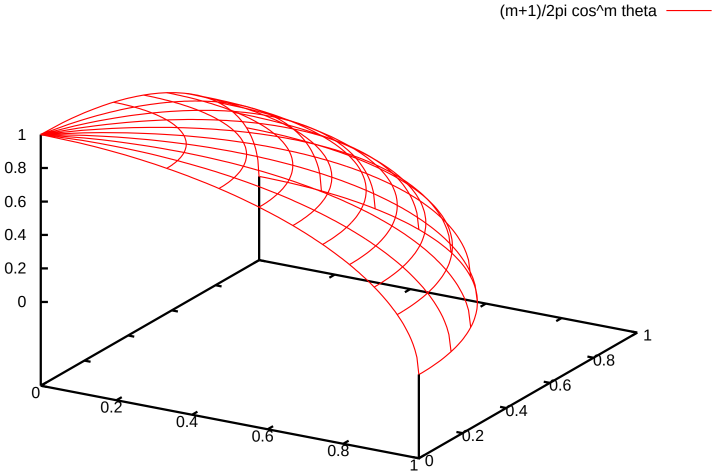
cf. "Global Illumination Compendium", eq 34

$pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{2\pi}$:

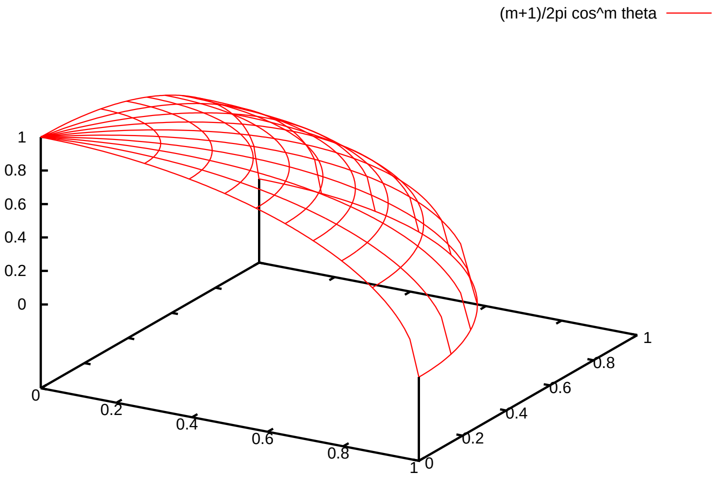
- u_1, u_2 nombres aléatoires uniformes,
- $\phi = 2\pi \cdot u_1$,
- $\theta = \cos^{-1}(u_2)$,
- $x = \cos(2\pi \cdot u_1)\sqrt{1 - u_2^2}$,
- $y = \sin(2\pi \cdot u_1)\sqrt{1 - u_2^2}$,
- $z = u_2$,

résultats disponibles pour des *pdf* non uniformes, $cos\theta, \cos^m \theta$, ...

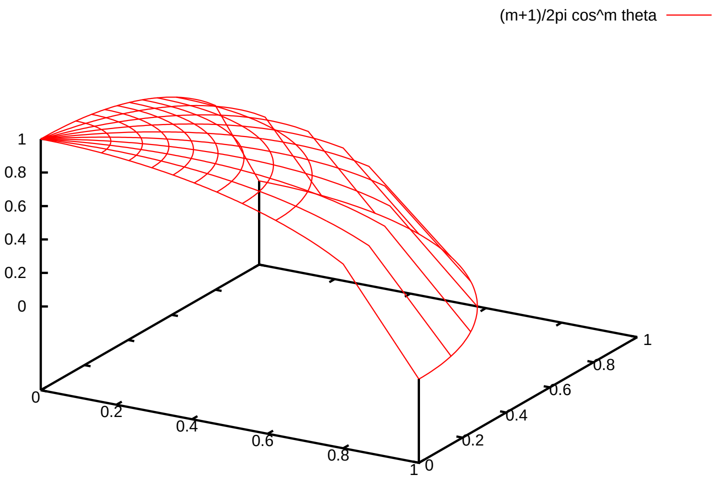
Exemple : $\cos\theta/\pi$ $(m = 1)$



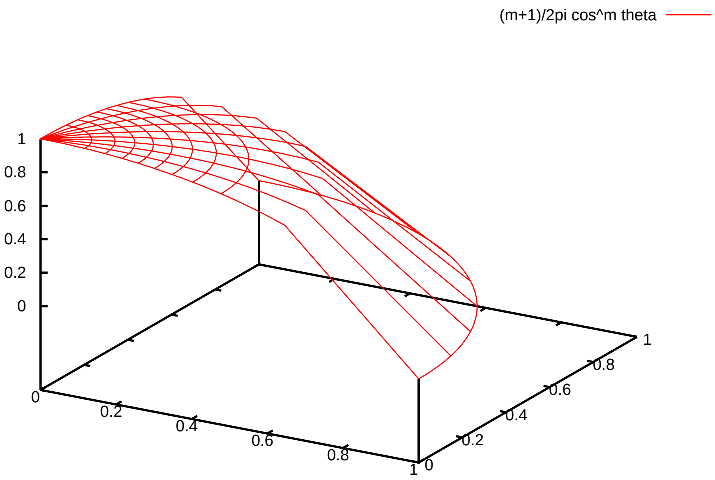
Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 2$



Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 8$



Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 16$



et alors ?

- préférer les *pdf* avec une inversion directe,
- sinon, générer plusieurs échantillons pour amortir le coût de construction,
- mais l'inversion numérique permet d'utiliser (presque) n'importe quoi comme densité de probabilité ...

presque ?

application à l'éclairage indirect

on veut calculer :

$$L_r(p, \vec{\omega}_r) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \to \vec{\omega}_r) |\cos\theta| d\omega$$

- avec $\Omega = \Omega^+ - \Omega_S$ l'ensemble de directions désignant les objets visibles autour de p,

choisir une *pdf*, choisir des directions selon la *pdf*, et finir le calcul.
application directe : directions uniformes, directions proportionnelles à $\cos\theta$, à $f_r()$ ...

application à l'éclairage direct

on veut calculer :

$$L_r(p,\vec{\omega}_r) = \sum_{s \in Sources} \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} L_i(p,\vec{\omega}) f_r(p,\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos\theta| d\omega$$

- avec Ω_s l'ensemble de directions associé à la source s,

déterminer Ω_s, choisir une *pdf*, choisir des directions selon la *pdf*, et finir le calcul.

déterminer Ω_s ?

déterminer l'ensemble de directions Ω_s

projection de la forme de la source de lumière sur une (hemi-) sphère unitaire ...

méthode naïve :

- générer des directions uniformes sur l'hemisphère complète,
- et rejetter celles qui n'interceptent pas la source de lumière ...
- plus la source est petite, vue de p, plus c'est difficile ...
- ??

travailler dans un domaine plus adapté ...

changer de domaine d'intégration

autre solution :

- parcourir la surface de la source de lumière,
- déterminer la direction associée à chaque point,
- vérifier que la source est bien l'objet visible dans cette direction,
- finir le calcul . . .

mais :

- on ne "travaille" plus sur le même domaine (des directions), mais sur les points à la surface de la source.

changer de domaine d'intégration

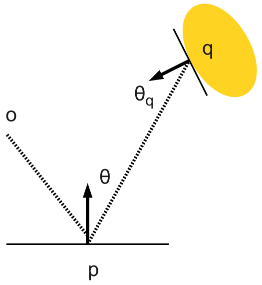
on veut calculer :

- $L_r(p, \vec{\omega}_r) = \int_{q \in A_s} L_i(p, \vec{\omega}_q) f_r(p, \vec{\omega}_q \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos\theta| \ldots$,
- avec $q \in A_s$, l'ensemble de points de la surface de la source s,
- et $\vec{\omega}_q$, la direction pq.

quelle relation entre dq et $d\omega$?

changer de domaine d'intégration

- $d\omega = \frac{\cos\theta_q}{r^2} dq$
- angle solide d'un élément de surface dq à une distance r de p.



finir la subsititution ...

changer de domaine d'intégration

$$L_r(p,\vec{\omega}_r) = \int_{q\in A_s} L_i(p,\vec{\omega}_q) f_r(p,\vec{\omega}_q \rightarrow \vec{\omega}_r) V(p,q) \cos\theta \frac{\cos\theta_q}{||pq||^2} dq$$

reformulation :

- avec $q \in A_s$, l'ensemble de points de la surface de la source s,
- $\vec{\omega}_q$, la direction pq,
- $V(p,q) = 1$ si p et q sont visibles, 0 sinon.

et alors ?

algorithme :

- choisir une source de lumière,
- choisir N points à la surface de la source,
- vérifier que les p et q sont visibles,
- calculer la contribution de la source,
  en fonction de la *pdf* des points q,
- finir le calcul.

choisir des points uniformement dans un triangle ?
cf. "Global Illumination Compendium" eq 18.