M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

October 27, 2010

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance (probabilités) :

espérance de x, noté

$$E(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x)\, pdf(x)\, d\mu \approx \frac{|D|}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

avec x variable aléatoire "décrite" par $pdf(x)$, une densité de probabilité. $pdf(x) = \frac{1}{|D|}$, pour une variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$

en utilisant $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) d\mu$ ...

posons $g(x) = f(x)/pdf(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{x \in D} g(x) pdf(x) d\mu = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x) d\mu \equiv I$$

$$E(g(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)} \equiv I$$

Intégration numérique : exemple

éclairage direct :

on veut connaitre : $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} L_i(p, \vec{\omega})(...) d\omega$,

à la place on calcule : $J = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p,\vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} d\omega$,

$$I = E(J) = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_s} \frac{L_i(p, \vec{\omega})(...)}{pdf(\vec{\omega})} pdf(\vec{\omega}) d\omega$$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{\frac{1}{|\Omega_s|}}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega_s|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω_s.

Intégration numérique : exemple

éclairage indirect :

- calculer l'énergie incidente sur les autres directions ...
- $I = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} L_i(p, \vec{\omega})(...)d\omega$,
- avec $\Omega = \Omega^+ - \Omega_S$

$$I = E(J) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k)(...)}{\frac{1}{|\Omega|}}$$

et $pdf(\vec{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|}$, les échantillons $\vec{\omega}_k$ sont tirés uniformément dans l'ensemble de directions Ω.

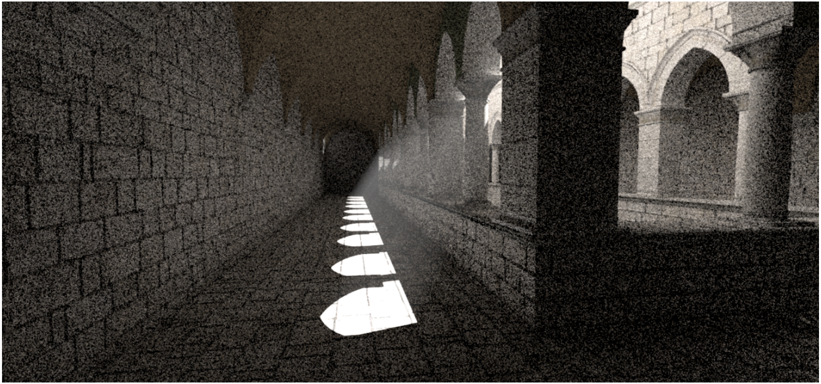
et alors ?

c'est la même chose ?

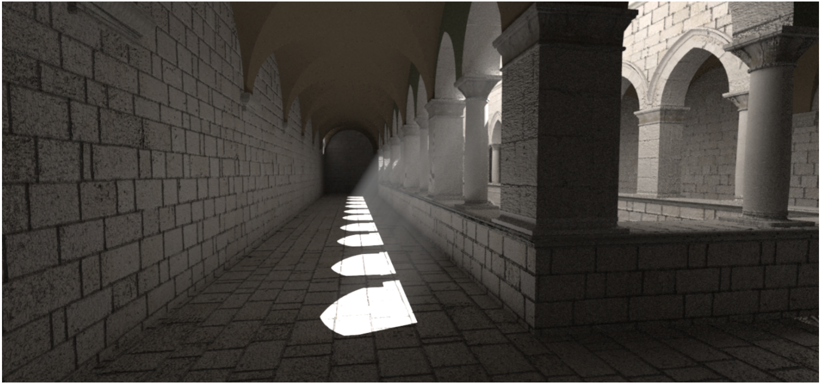
- l'intégrale est la même, la méthode de calcul aussi, ...
- qu'est ce qui change ?

on ne "travaille" pas sur le même ensemble de directions.

Exemple :



Exemple :



et alors ?

quelle est la qualité de l'estimation ?

- elle varie en fonction de N,
- elle varie avec $pdf(\vec{\omega})$.

pourquoi ?

Monte Carlo

l'estimateur $\hat{I}$ n'est qu'une approximation de I :

- quelle est sa qualité ?
- comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que $\hat{I}$ converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :

pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

Variance

on mesure la qualité de $\hat{I}$ en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Faire mieux ...

2 solutions :

- augmenter le nombre d'échantillons,
- *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?

Réduction de variance

intuition :

pour N échantillons, la qualité de $\hat{I}$ dépend de la manière de choisir les échantillons ...
c'est à dire de la densité de x : $pdf(x)$.

mieux choisir les échantillons :

- solution de base : $pdf(x) = constante$,
- meilleure solution : choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle à la fonction intégrée ?

Choisir une *pdf*

choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos\theta|$$

- $L_i(p, \vec{\omega})$?
- $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$?
- $\cos\theta$?
- le produit des 3 ?

Choisir une *pdf*

- $L_i(p, \vec{\omega})$?
- $f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$: connaissant $\vec{\omega}_r$, se réduit à $k_d + k_s \cdot \cos^m \theta_h$,
- $\cos\theta$: le plus simple,
- le produit des 3 : le plus compliqué, mais *serait* le plus efficace.

Densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^{b} pdf(t)dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_{a}^{b} pdf(t)dt$$

ou $\mathbb{P}$ est la probabilité de la variable aléatoire x, et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x.

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Densité de probabilité

propriet́és :

$$\int pdf(t)dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout t}$$

- pour une variable aléatoire uniforme x, $pdf(x) = constante$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- sinon, pdf(x) prend une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Utiliser $\cos\theta$ comme *pdf*

- la pdf doit être positive, pour les valeurs utilisées,
- la pdf doit être normalisée, pour les valeurs utilisées :

$$\int_{\vec{\omega}\in\Omega} pdf(\vec{\omega})d\omega = 1$$

$\cos\theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
constante de normalisation k telle que :

$$\frac{1}{k}\int_{\vec{\omega}\in\Omega} \cos\theta d\omega = 1$$

Utiliser $\cos\theta$ comme *pdf*

$$k = \int_{\vec{\omega}\in\Omega} \cos\theta d\omega$$

en coordonnées polaires (θ, ϕ) on a : $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$
d'ou :

$$k = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi$$

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos\theta}{k} = \frac{\cos\theta}{\pi}$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 35.

Utiliser $\cos^m\theta$ comme *pdf*

même démarche :

- $\cos^m\theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
- $k = \int_\Omega \cos^m\theta d\omega = \frac{2\pi}{m+1}$,

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos^m\theta}{k} = \frac{m+1}{2\pi}\cos^m\theta$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 36.

et alors ?

selon la *pdf* choisie, on peut simplifier au moins un terme :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega})} L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r) |\cos\theta|$$

avec $pdf(\vec{\omega}) = \cos\theta / \pi$:

$$\pi L_i(p, \vec{\omega}) f_r(p, \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_r)$$

générer des échantillons (des directions) $\vec{\omega} \propto \cos\theta / \pi$?