

M2-Images

Intégration numérique et Monte Carlo

J.C. Iehl

November 12, 2009

Résumé des épisodes précédents

- ▶ transformations,
- ▶ intersections + accélérations,
- ▶ matières,
- ▶ algorithme générique,
- ▶ éclairage direct : principes.

intégration numérique ...

Rappel : éclairage direct

$$L_o(p, o) = \int_{q \in A_L} L_i(p, q) V(p, q) f_r(q, p, o) \cos \theta \frac{\cos \theta_q}{r^2} dA$$

intégration stochastique :

les échantillons q_k sont choisis aléatoirement à la surface de la source :

$$L_o(p, o) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N L_i(p, q_k) V(p, q_k) f_r(q_k, p, o) \cos \theta \frac{\cos \theta_{q_k}}{r_k^2} A$$

moyenne des valeurs de la fonction intégrée pour les N échantillons aléatoires (uniformes, $pdf(q) = \frac{1}{A}$).

Intégration numérique

de manière générale :

$$I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$$

estimateur Monte Carlo :

$$\hat{I} = \frac{D}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : pourquoi ça marche ?

basé sur l'espérance (probabilités) :

espérance de x , noté

$$E(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

espérance de $f(x)$, noté

$$E(f(x)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

espérance de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) d\mu = \frac{D}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

avec x variable aléatoire "décrite" par $pdf(x)$, une densité de probabilité. $pdf(x) = \frac{1}{D}$, pour une variable aléatoire uniforme.

Intégration numérique : comment ça marche ?

on veut calculer : $I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$

et l'espérance de $f(x)$: $E(f(x)) = \int_{x \in D} f(x) pdf(x) d\mu \dots$

posons $g(x) = f(x)/pdf(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{x \in D} g(x) pdf(x) d\mu = \int_{x \in D} \frac{f(x)}{pdf(x)} pdf(x) d\mu = I$$

$$E(g(x)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)} = I$$

Intégration numérique : exemple

éclairage direct :

on veut connaître : $I = \int_{q \in A_L} L_i(p, q)(...)dA,$

à la place on calcule : $J = \int_{q \in A_L} \frac{L_i(p, q)(...)}{pdf(q)} dA,$

$$I = E(J) = \int_{q \in A_L} \frac{L_i(p, q)(...)}{pdf(q)} pdf(q) dA$$

$$I = E(J) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_i(p, q_k)(...)}{1/A}$$

et $pdf(q) = \frac{1}{A}$, les échantillons q_k sont tirés uniformément à la surface de la source.

Densité de probabilité et probabilité

définition :

$$\mathbb{P}(x < b) = \int_{-\infty}^b pdf(t)dt$$

$$\mathbb{P}(a < x < b) = \mathbb{P}(x < b) - \mathbb{P}(x < a) = \int_a^b pdf(t)dt$$

ou \mathbb{P} est la probabilité de la variable aléatoire x , et $pdf(x)$ est sa dérivée, la densité de probabilité de x .

remarque :

l'équivalent discret d'une densité de probabilité est un histogramme.

Densité de probabilité

propriétés :

$$\int pdf(t)dt = 1$$

$$pdf(t) > 0, \text{ pour tout } t$$

- ▶ pour une variable aléatoire uniforme x , $pdf(x) = \text{constante}$, pas de préférences dans le choix des valeurs.
- ▶ sinon, $pdf(x)$ prends une valeur plus importante pour indiquer les valeurs "préférées".

Echantillonnage préférentiel (notions)

en choisissant "judicieusement" la pdf, on peut simplifier une partie des calculs ...

exemple :

$$\begin{aligned}
 L_o(p, \vec{o}) &= \int_{\vec{\omega} \in \Omega_L} L_i(p, \vec{\omega}) V(p, \text{trace}(p, \vec{\omega})) f_r(\vec{\omega}, p, \vec{o}) \cos \theta d\omega \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_i(p, \vec{\omega}_k) V(p, \text{trace}(p, \vec{\omega}_k)) f_r(\vec{\omega}_k, p, \vec{o}) \cos \theta_k}{pdf(\vec{\omega}_k)}
 \end{aligned}$$

et si $pdf(\vec{\omega}) \propto \cos \theta$ ou $f_r(\vec{\omega}, p, \vec{o})$?

Monte Carlo

résumé :

$$I = \int_{x \in D} f(x) d\mu$$
$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(x_k)}{pdf(x_k)}$$

avec x variable aléatoire de densité $pdf(x)$.

et alors ?

Monte Carlo

l'estimateur \hat{I} n'est qu'une approximation de I :

- ▶ quelle est sa qualité ?
- ▶ comment l'améliorer ?

Convergence

on peut montrer que \hat{I} converge vers I en $O(\sqrt{N})$.

conclusion :

pour une solution 2 fois plus précise, il faut 4 fois plus d'échantillons.

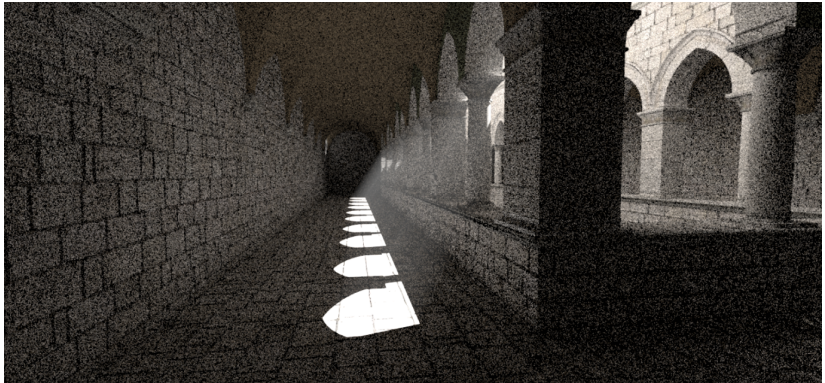
Variance

on mesure la qualité de \hat{I} en estimant sa *variance* :

$$V(x) = E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

plus la variance est importante, plus il y a de bruit dans les images.

Exemple :



Exemple :



Faire mieux ...

2 solutions :

- ▶ augmenter le nombre d'échantillons,
- ▶ *réduire la variance*, sans augmenter le nombre d'échantillons ?

Réduction de variance

intuition :

pour N échantillons, la qualité de \hat{I} dépend de la manière de choisir les échantillons ...

c'est à dire de la densité de x : $pdf(x)$.

mieux choisir les échantillons :

- ▶ solution de base : $pdf(x) = constante$,
- ▶ meilleure solution : choisir une pdf (à peu près) proportionnelle à la fonction intégrée ?

Choisir une *pdf*

choisir une *pdf* (à peu près) proportionnelle :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega}_k)} L_i(p, \vec{\omega}_k) V(p, trace(p, \vec{\omega}_k)) f_r(\vec{\omega}_k, p, \vec{\sigma}) \cos \theta_k$$

- ▶ $L_i(p, \vec{\omega})$?
- ▶ $V(p, trace(p, \vec{\omega}))$?
- ▶ $f_r(\vec{\omega}, p, \vec{\sigma})$?
- ▶ $\cos \theta$?
- ▶ le produit des 4 ?

Choisir une *pdf*

- ▶ $L_i(p, \vec{\omega}) : ??$
- ▶ $V(p, \text{trace}(p, \vec{\omega}))$: valeur binaire, trop imprévisible,
- ▶ $L_i(p, \dots) \cdot V(p, \dots)$: plus intéressant, mais imprévisible,
- ▶ $f_r(\vec{\omega}, p, \vec{o})$: connaissant \vec{o} , se réduit à $k_1 + k_2 \cdot \cos^m \theta_h$,
- ▶ $\cos \theta$: le plus simple,
- ▶ le produit des 4 : le plus compliqué, mais *serait* le plus efficace.

Utiliser $\cos \theta$ comme *pdf*

- ▶ la pdf doit être positive, pour les valeurs utilisées,
- ▶ la pdf doit être normalisée, pour les valeurs utilisées :

$$\int_{\vec{\omega} \in \Omega} pdf(\vec{\omega}) d\omega = 1$$

$\cos \theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
constante de normalisation k telle que :

$$\frac{1}{k} \int_{\vec{\omega} \in \Omega} \cos \theta d\omega = 1$$

Utiliser $\cos \theta$ comme pdf

$$k = \int_{\vec{\omega} \in \Omega} \cos \theta d\omega$$

en coordonnées polaires (θ, ϕ) on a : $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$
 d'où :

$$k = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi$$

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos \theta}{k} = \frac{\cos \theta}{\pi}$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 35.

Utiliser $\cos^m \theta$ comme pdf

même démarche :

- ▶ $\cos^m \theta$ est bien positif pour $0 < \theta < \pi/2$,
- ▶ $k = \int_{\Omega} \cos^m \theta d\omega = \frac{2\pi}{m+1}$,

$$pdf(\vec{\omega}) = \frac{\cos^m \theta}{k} = \frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$$

cf. "Global Illumination Compendium", eq 30, 36.

et alors ?

selon la *pdf* choisie, on peut simplifier au moins un terme :

$$\frac{1}{pdf(\vec{\omega}_k)} L_i(p, \vec{\omega}_k) V(p, trace(p, \vec{\omega}_k)) f_r(\vec{\omega}_k, p, \vec{o}) \cos \theta_k$$

avec $pdf(\vec{\omega}_k) = \cos \theta / \pi$:

$$\pi L_i(p, \vec{\omega}_k) V(p, trace(p, \vec{\omega}_k)) f_r(\vec{\omega}_k, p, \vec{o})$$

générer des échantillons (des directions) $\vec{\omega}_k \propto \cos \theta / \pi$?

Générer des échantillons

générer des directions :

- ▶ générer des nombres aléatoires uniformes entre 0 et 1 :
 u_1, u_2, \dots
- ▶ transformation en direction uniforme ?
- ▶ transformation en direction suivant une *pdf* ?

cf. `drand48()`

Exemple : cas uniforme sur l'(hemi) sphère.

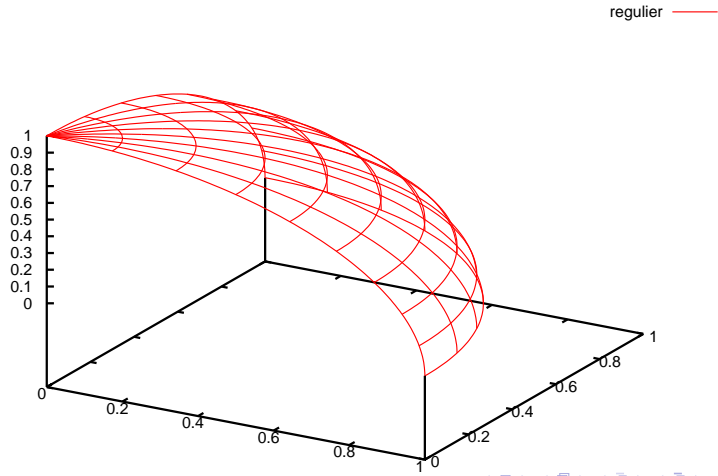
dans quel espace / repère travailler ?

- ▶ avec (θ, ϕ) ?
- ▶ directement avec (x, y, z) ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

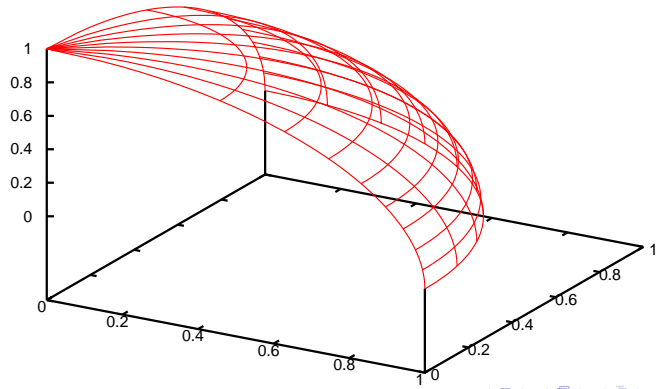
est-ce que $\vec{\omega}(\theta = u_1, \phi = u_2)$ donne une direction uniforme sur l'hémisphère ($pdf(\vec{\omega}) = 1/2\pi$) ?

Exemple :



Exemple :

uniforme ———



Inversion de la fonction de répartition (notions)

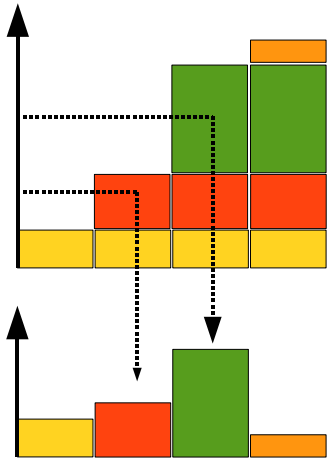
comment déformer / transformer les valeurs aléatoires uniformes u_1, u_2 , etc. pour obtenir la *pdf* voulue ?

exemple discret :

- ▶ 4 valeurs possibles, p_1, p_2, p_3, p_4 , définissent la *pdf*,
- ▶ probabilité de choisir p_1, p_2, p_3, p_4 ?

application directe de la définition : $\mathbb{P}(x < b) = \int_0^b pdf(t)dt$.

Exemple :



Inversion de la fonction de répartition (notions)

- ▶ tirage d'un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1,
- ▶ trouver la valeur p_j correspondante.

Inversion de la fonction de répartition (notions)

algorithme :

- ▶ construire la fonction de répartition, \mathbb{P} , en utilisant toutes les valeurs p_i (+ normaliser \mathbb{P}),
- ▶ déterminer $x_i = \mathbb{P}^{-1}(u_1)$:
- ▶ chercher la valeur de \mathbb{P} telle que $\mathbb{P}(x_i) < u_1 < \mathbb{P}(x_{i+1})$

remarque :

algorithme correct en dimension 2, 3, etc..

Inversion de la fonction de répartition (notions)

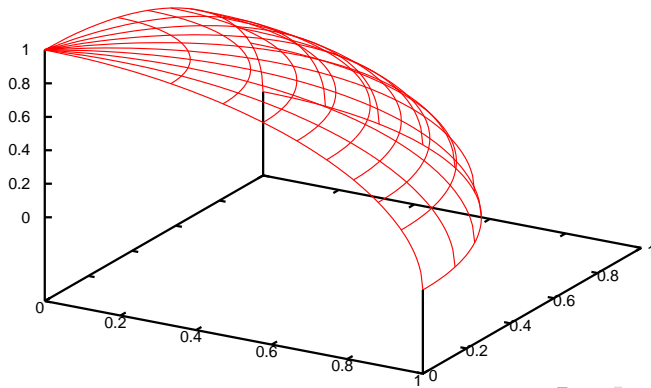
dans certains cas :

- ▶ calcul direct de \mathbb{P}^{-1} ,
- ▶ déterminer comment transformer les u_i pour "produire" des échantillons avec la *pdf* voulue.

cf. "Global Illumination Compendium" eq. 30, 35, 36 ...

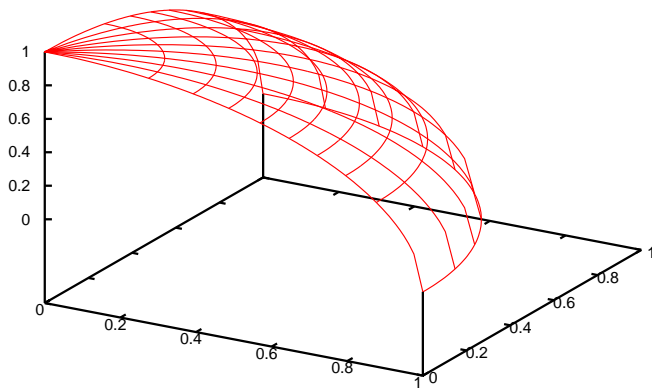
Exemple : $\cos \theta / \pi$ ($m = 1$)

$(m+1)/2\pi \cos^m \theta$ —



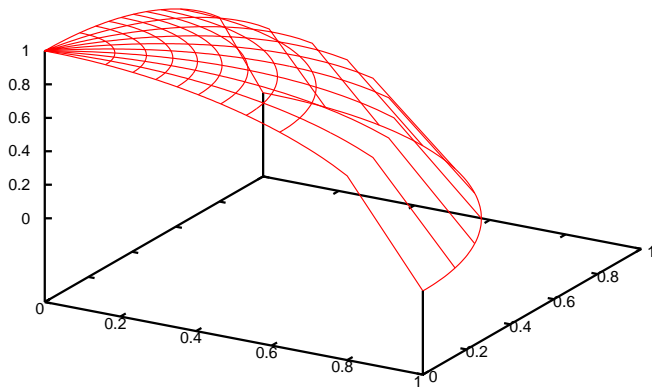
Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 2$

$(m+1)/2\pi \cos^m \theta$ —



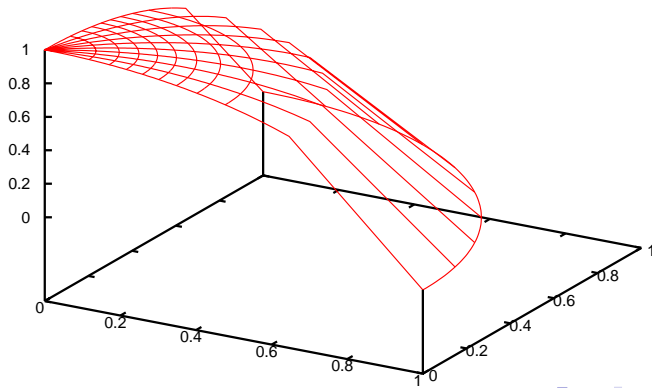
Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 8$

$(m+1)/2\pi \cos^m \theta$ —



Exemple : $\frac{m+1}{2\pi} \cos^m \theta$, pour $m = 16$

$(m+1)/2\pi \cos^m \theta$ —



et alors ?

- ▶ préférer les *pdf* avec une inversion directe,
- ▶ sinon, générer plusieurs échantillons pour amortir le coût de construction,
- ▶ ou, utiliser une autre méthode, sans coût de construction ?

Tirage par rejet

appliquer Monte Carlo au tirage lui même :

- ▶ choisir u_i et v_i : nombres aléatoires uniformes entre 0 et 1,
- ▶ si $u_i < pdf(v_i)$:
- ▶ utiliser / renvoyer v_i ,
- ▶ sinon recommencer.

quelle efficacité (combien d'essais avant de valider le test) ?

Exemple : tirage par rejet d'une direction sur l'hémisphère

- ▶ $x_i = \text{drand48()} * 2 - 1$
- ▶ $y_i = \text{drand48()} * 2 - 1$
- ▶ $z_i = \text{drand48()}$
- ▶ tant que $\text{Vector}(x_i, y_i, z_i).\text{Length}() > 1$
- ▶ renvoyer $\text{Vector}(x_i, y_i, z_i).\text{Normalize}()$

remarque :

utilise un repère local : la normale est alignée sur l'axe z.

quelle modification pour une hémisphère quelconque ?

Exercice :

- ▶ comment appliquer ces 2 algorithmes à une *brdf* composée : diffus + réfléchissant ?
- ▶ comment appliquer ces 2 algorithmes à un miroir / objet transparent ?

Exemple : *brdf* composée : diffus + réfléchissant (dans le plan (θ, ϕ))

