

# M2-Images

## Transformations

J.C. lehl

October 6, 2009

# Objectif : lancer de rayons

algorithme :

- ▶ déterminer la direction de la droite passant par l'observateur et le centre du pixel,
- ▶ calculer l'intersection de la droite avec tous les objets de la scène,
- ▶ ne conserver que la plus petite : l'objet visible, le plus proche de l'observateur,
- ▶ donner une couleur au point.

# Objectif : géométrie

représentation d'un point, d'une direction :

- ▶ un point, noté  $p$ ,
- ▶ un vecteur, noté  $\vec{v}$ ,
- ▶ un *rayon*, noté :  $r(t) = o + t \cdot \vec{d}$

représentation de l'observateur :

- ▶ une position,  $O$  et 3 directions : à droite ( $\vec{X}$ ), en haut ( $\vec{Y}$ ), et devant ( $-\vec{Z}$ ),
- ▶ c'est à dire un repère orthonormé.
- ▶ le rayon et les "objets" doivent tous être représentés dans ce repère.

# Rappels: points, vecteurs et repères

espace affine :

- ▶ un point : une position, pas de direction, ni de longueur,
- ▶ un vecteur : une direction et une longueur mais pas de position.

connaissant une origine, on peut construire un vecteur représentant un point.

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}| \text{ et } \text{dir}(\vec{u}) = \text{dir}(\vec{v}).$$

# Opérations : addition, soustraction, etc.

- ▶  $p + \vec{u}$  est un point,
- ▶  $q - p$  est un vecteur, (noté  $\vec{pq}$ ),
- ▶ si  $\vec{u} = q - p \Rightarrow q = p + \vec{u}$  et  $p = q - \vec{u}$ ,
- ▶  $p + q$  n'a pas de sens.
  
- ▶  $1 \cdot p = p$ ,
- ▶  $0 \cdot p = 0$ ,
- ▶  $k \cdot p$  n'est défini que si  $k = 0$  ou  $k = 1$  ?

# Opérations : produits scalaire et vectoriel

produit scalaire :

- ▶  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$
- ▶  $\vec{u}_{\parallel} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$
- ▶  $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$

utile pour "projeter" un vecteur sur un autre ( $\vec{u}_{\parallel}$ ), calculer le cosinus de l'angle entre 2 vecteurs, etc.

quel est le produit scalaire de 2 vecteurs perpendiculaires ?

# Opérations : produits scalaire et vectoriel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$\text{et } |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})}$$

# Opérations : produits scalaire et vectoriel

produit vectoriel :

- ▶  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$
- ▶  $\vec{u} \times \vec{v}$  perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,
- ▶ (perpendiculaire au plan défini par les 2 vecteurs)

utile pour calculer la normale d'un triangle, la surface d'un triangle, etc.

# Opérations : produits scalaire et vectoriel

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$$

très utile pour construire un repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  !

# Coordonnées cartésiennes

dans un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

▶  $\vec{u} = u_x \cdot \vec{x} + u_y \cdot \vec{y} + u_z \cdot \vec{z}$

▶ noté  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

▶  $p = O + \overrightarrow{Op} = O + p_x \cdot \vec{x} + p_y \cdot \vec{y} + p_z \cdot \vec{z}$

▶ noté  $p = (p_x, p_y, p_z)$

avec :  $u_x = \vec{u} \cdot \vec{x}$ ,  $u_y = \vec{u} \cdot \vec{y}$ ,  $u_z = \vec{u} \cdot \vec{z}$

et  $\overrightarrow{Op} = p - O$

# Repère orthonormé et produit vectoriel

dans un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{x} \times \vec{y} = +\vec{z}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{z}, \quad \vec{y} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\vec{y} \times \vec{z} = +\vec{x}, \quad \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{z} \times \vec{y} = -\vec{x}, \quad \vec{z} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{z} \times \vec{x} = +\vec{y}, \quad \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\vec{x} \times \vec{z} = -\vec{y}, \quad \vec{x} \cdot \vec{z} = 0$$

connaissant 2 vecteurs quelconques, comment construire un repère orthonormé ?

# Changement de repères

soit un vecteur  $\vec{u}$  :

- ▶ coordonnées dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :
- ▶  $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{x} + (\vec{u} \cdot \vec{y})\vec{y} + (\vec{u} \cdot \vec{z})\vec{z}$
- ▶ et dans le repère  $(Q, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ?
- ▶  $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$

# Changement de repères

on connaît  $p$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,

on veut connaître ses coordonnées dans le repère  $(Q, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$p = O + \vec{Op}, \text{ mais aussi } p = Q + \vec{Qp}$$

donc

$$p = Q + \vec{QO} + \vec{Op}$$

$$\text{rappel : } \vec{ab} = b - a$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

rappel : espace affine, transformation affine

- ▶ une transformation  $T$  est linéaire si :
- ▶  $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ ,
- ▶  $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$
  
- ▶ une transformation  $T$  est affine si :
- ▶ l'image par  $T$  d'un point est un point,
- ▶ l'image par  $T$  d'un vecteur est un vecteur.

et :

$$T\left(\sum_{i=0}^n k_i \cdot c_i\right) = \sum_{i=0}^n k_i \cdot T(c_i)$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

soit  $T$  une transformation affine et un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

▶  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{x} + u_2\vec{y} + u_3\vec{z}$

▶  $T(\vec{u}) = u_1 T(\vec{x}) + u_2 T(\vec{y}) + u_3 T(\vec{z})$

▶  $p = (p_1, p_2, p_3) = O + p_1\vec{x} + p_2\vec{y} + p_3\vec{z}$

▶  $T(p) = T(O) + p_1 T(\vec{x}) + p_2 T(\vec{y}) + p_3 T(\vec{z})$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

donc  $T$  est complètement déterminée par  $T(O)$ ,  $T(\vec{x})$ ,  $T(\vec{y})$ ,  $T(\vec{z})$ .

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} T(\vec{x}) & T(\vec{y}) & T(\vec{z}) & T(O) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \vec{u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(p) = \begin{bmatrix} T(\vec{x}) & T(\vec{y}) & T(\vec{z}) & T(O) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

notation homogène :

$$T^h = \begin{bmatrix} T(\vec{x}) & T(\vec{y}) & T(\vec{z}) & T(O) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}^h = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ w \equiv 0 \end{bmatrix}$$

$$p^h = \begin{bmatrix} p \\ w \equiv 1 \end{bmatrix}$$

rappels :

$$T(\vec{u}) = T(\vec{u}^h) / u_w^h$$

$$T(p) = T(p^h) / p_w^h$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

translation d'un point  $p$  par un vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, 0)$

$$T(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$T(\vec{y}) = \vec{y}$$

$$T(\vec{z}) = \vec{z}$$

$$T(O) = O + \vec{u}$$

$$\text{donc } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Changement de repères, et avec des matrices ?

on connaît  $p$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,

on veut connaître ses coordonnées dans le repère  $(Q, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

rappel :

$$p = O + p_x \cdot \vec{x} + p_y \cdot \vec{y} + p_z \cdot \vec{z}$$

$$p = Q + p_i \cdot \vec{i} + p_j \cdot \vec{j} + p_k \cdot \vec{k}$$

$$Q = O + q_x \cdot \vec{x} + q_y \cdot \vec{y} + q_z \cdot \vec{z} \quad T(Q) = O + (q_x, q_y, q_z)$$

$$\vec{i} = i_x \cdot \vec{x} + i_y \cdot \vec{y} + i_z \cdot \vec{z} \quad T(\vec{i}) = (i_x, i_y, i_z)$$

$$\vec{j} = j_x \cdot \vec{x} + j_y \cdot \vec{y} + j_z \cdot \vec{z} \quad T(\vec{j}) = (j_x, j_y, j_z)$$

$$\vec{k} = k_x \cdot \vec{x} + k_y \cdot \vec{y} + k_z \cdot \vec{z} \quad T(\vec{k}) = (k_x, k_y, k_z)$$

quelle relation entre  $(p_x, p_y, p_z)$  et  $(p_i, p_j, p_k)$  ?

# Changement de repères, et avec des matrices ?

$$\begin{aligned}
 p &= Q + p_i \cdot \vec{i} + p_j \cdot \vec{j} + p_k \cdot \vec{k} \\
 &= (O + q_x \cdot \vec{x} + q_y \cdot \vec{y} + q_z \cdot \vec{z}) \\
 &\quad + p_i \cdot (i_x \cdot \vec{x} + i_y \cdot \vec{y} + i_z \cdot \vec{z}) \\
 &\quad + p_j \cdot (j_x \cdot \vec{x} + j_y \cdot \vec{y} + j_z \cdot \vec{z}) \\
 &\quad + p_k \cdot (k_x \cdot \vec{x} + k_y \cdot \vec{y} + k_z \cdot \vec{z})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p &= O \\
 &\quad + (q_x + p_i i_x + p_j j_x + p_k k_x) \cdot \vec{x} \\
 &\quad + (q_y + p_i i_y + p_j j_y + p_k k_y) \cdot \vec{y} \\
 &\quad + (q_z + p_i i_z + p_j j_z + p_k k_z) \cdot \vec{z}
 \end{aligned}$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & q_x \\ i_y & j_y & k_y & q_y \\ i_z & j_z & k_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(Q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Changement de repères, et avec des matrices ?

$$\begin{bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & q_x \\ i_y & j_y & k_y & q_y \\ i_z & j_z & k_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

dans le cas d'un changement de repère les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont orthonormés, et  $T^{-1} = T^t$

quelle relation avec  $T(\vec{x})$ ,  $T(\vec{y})$ ,  $T(\vec{z})$  et  $T(O)$  ?

# Changement de repères, et avec des matrices ?

exercice :

- ▶ on souhaite ré-orienter un objet : quelle est la matrice de rotation autour de  $\vec{z}$  ?
- ▶ on souhaite aussi déplacer l'objet après sa rotation, quelle est la matrice de translation ?
- ▶ on souhaite obtenir une seule matrice qui représente les deux transformations ?
- ▶ quelle est son inverse ? quelle est son utilité ?

# Composition de transformations

$$\text{repère 1} \xrightarrow{T_{12}} \text{repère 2} \xrightarrow{T_{23}} \text{repère 3}$$

on connaît  $p$  dans le repère 1, quelles sont ses coordonnées dans le repère 3 ?

$$p_2 = T_{12}p$$

$$p_3 = T_{23}p_2$$

$$p_3 = T_{23}(T_{12}p)$$

$$p_3 = T_{23}T_{12}p$$

$$p_3 = Tp \text{ avec } T = T_{23}T_{12}$$

# Matrices de rotation

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation autour d'un axe quelconque  $R(\vec{u}, \theta)$  ?

# Application au lancer de rayons

exercice :

- ▶ on connaît la position de chaque sommet d'un triangle dans  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
- ▶ on connaît la position et l'orientation de l'observateur dans  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
- ▶ quelle est la position des sommets du triangle dans le repère de l'observateur  $(E, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  ?
- ▶ déterminer que les sommets du triangle sont visibles ?

## Quelques précisions sur l'observateur

- ▶ définir sa position et son orientation,
- ▶ définir sa "projection",
- ▶ et la résolution de l'image ?
- ▶ déterminer la direction d'un rayon passant par le centre du pixel  $(x, y)$  ?

succession de transformations simples ...

## Quelques précisions sur l'observateur

plusieurs repères :

- ▶ repère de l'objet (matrice *Modele*  $\rightarrow$ ),
- ▶ repère de la scène (matrice *Vue*  $\rightarrow$ ),
- ▶ repère de l'observateur (matrice *Projection*  $\rightarrow$ ),
- ▶ repère de projection de l'observateur (matrice *Fenetre*  $\rightarrow$ ),
- ▶ repère de l'image.

connaissant les matrices de passage, repère par repère :

- ▶ sur quel pixel se projette un point de l'objet ?
- ▶ quelle direction dans le repère de la scène correspond à la direction du pixel  $(x, y)$  ?

## Matrice de "projection"

pour simplifier / réaliser toutes les manipulations précédentes la matrice de "projection" doit être inversible ...

ce qui n'est pas le cas par définition.

et alors ?

trouver une transformation affine équivalente.

## Matrice de "projection" orthographique

on se place dans un repère "canonique", un cube unitaire  $[-1 \ 1]^3$ .

une "projection" orthographique conserve la taille des objets, un point  $(x, y, z)$  se projette sur le pixel  $(x, y)$ .  
et  $z$  représente la distance du point.

transformation affine :

$$T(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$T(\vec{y}) = \vec{y}$$

$$T(\vec{z}) = \vec{z}$$

$$T(O) = O$$

représentation : matrice identité !

## Matrice de "projection" perspective

idée :

se ramener au cas de la "projection" orthographique ?

solution :

une pyramide de vision n'est finalement qu'un cube déformé !

même transformation utilisée par OpenGL et DirectX.

## Matrice de "projection" perspective

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

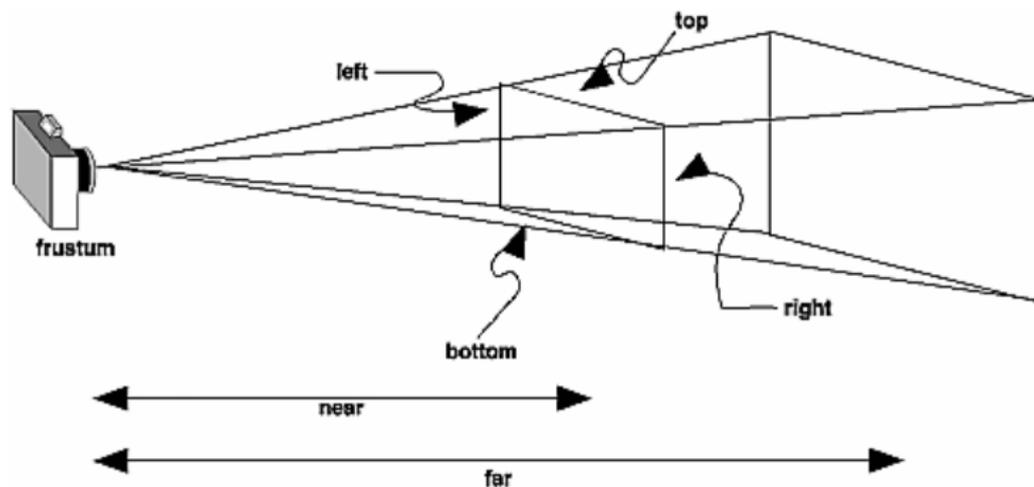
définit une volume de vision :

$z_{min} = near$  et  $z_{max} = far$ ,

$x_{min} = left$ ,  $x_{max} = right$ ,

$y_{min} = bottom$ ,  $y_{max} = top$ .

# Matrice de "projection" perspective



# Transformation " Fenetre "

dernière étape de la chaine de transformations : passer du cube unitaire " projectif " aux coordonnées écran.

c'est à dire passer d'un intervalle  $[-1 \ 1]$  à  $[0 \ n]$   
(pour  $n =$  largeur, hauteur, profondeur).

composition d'une mise à l'échelle et d'une translation :  
 $[-1 \ 1] \rightarrow [0 \ 2] \rightarrow [0 \ n]$

## Transformation " Fenetre "

l'espace " Fenetre " n'est pas un plan, mais un cube  
 $[0 \text{ largeur}] \times [0 \text{ hauteur}] \times [0 \text{ profondeur}]$ .

rappel :

$$r(t) = o + t \cdot \vec{d}$$

créer un rayon dans ce repère et le transformer pour obtenir son origine et sa direction dans le repère de la scène (ou d'un objet).

$$o_{\text{Fenetre}}(x, y) = (x, y, 0)$$

$$\vec{d}_{\text{Fenetre}}(x, y) = (x, y, \text{profondeur}) - (x, y, 0)$$