



fonction calcul\_couleur (rayon) → couleur

```
{ couleur_locale ← couleur_ambiante ;
```

```
  pour chaque objet faire
```

```
    {calculer_intersection (rayon, objet) ;
```

```
      garder_objet_le_plus_proche ;
```

```
    }
```

```
  si un objet a été gardé alors calculer_couleur_locale ;
```

```
  si réflexion alors couleur_r ← calcul_couleur(rayon_réfléchi) ;
```

```
  si transmission alors couleur_t ← calcul_couleur(rayon_transmis) ;
```

```
  retourner (couleur_locale+couleur_r+couleur_t) ;
```

```
}
```

programme principal

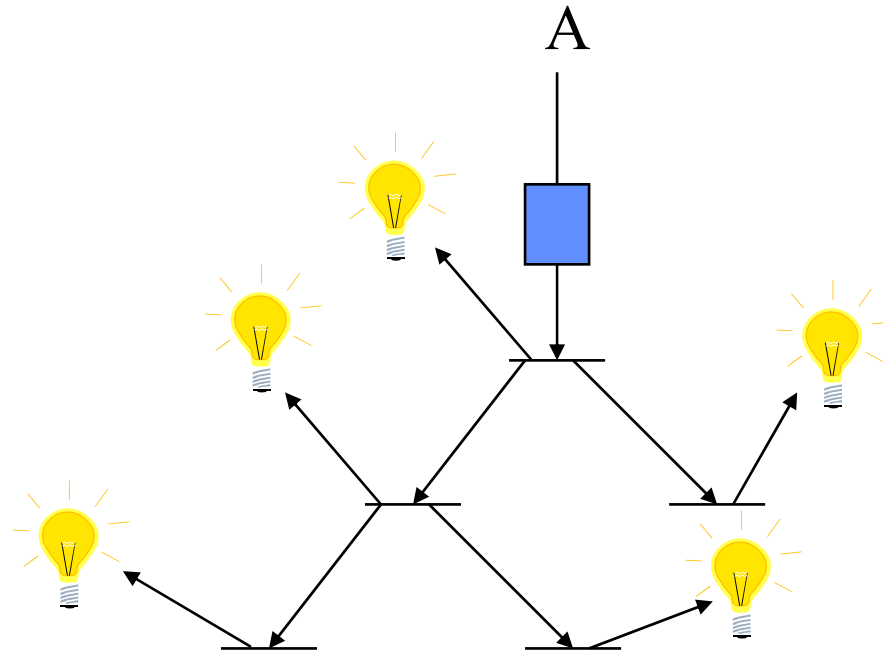
```
{ pour chaque pixel de l'écran faire
```

```
  {calculer_rayon (œil, pixel) ;
```

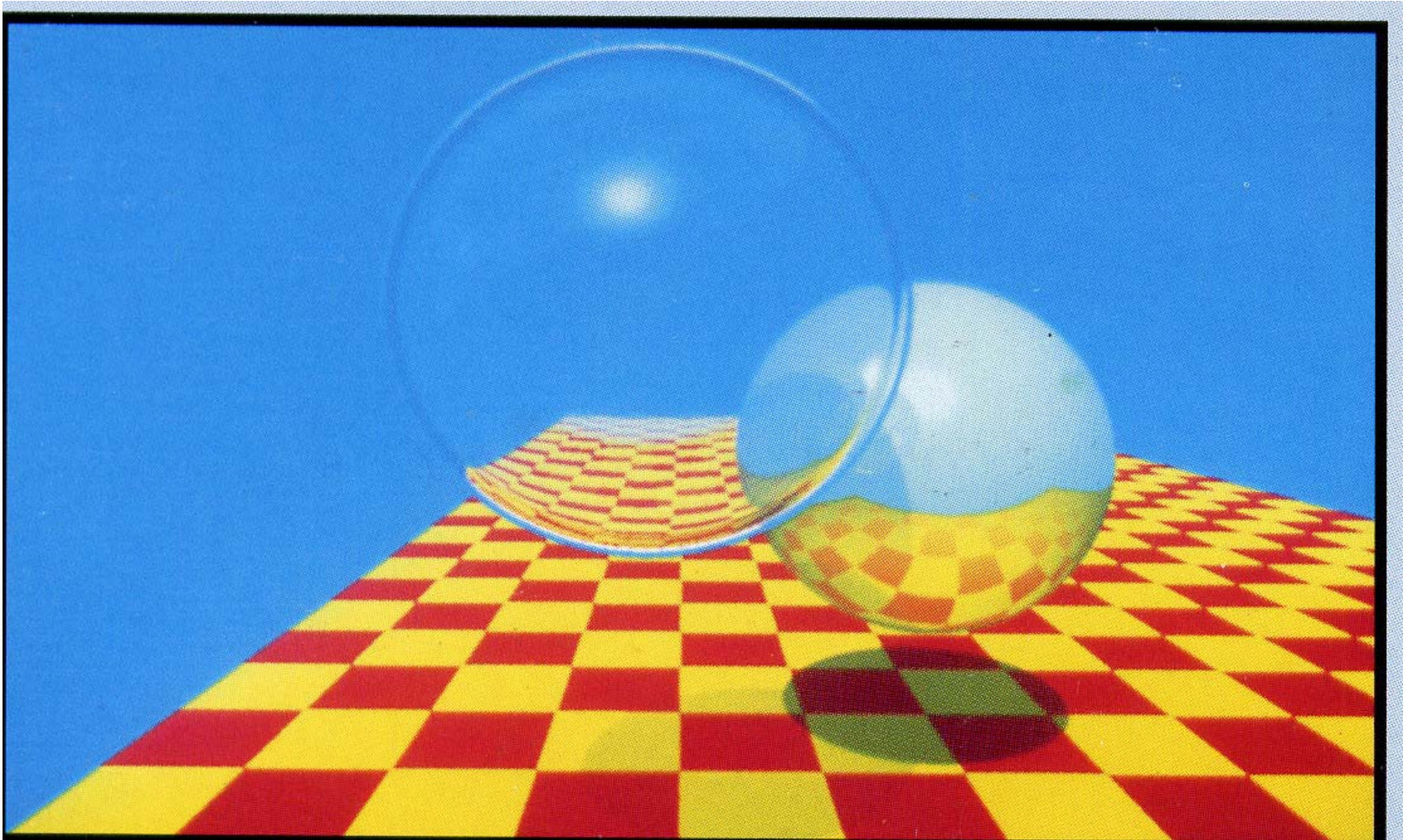
```
    afficher (calcul_couleur (rayon)) ;
```

```
  }
```

```
}
```



=> évaluation d'un arbre des rayons



d'après Whitted, Siggraph'1981

## 1.2 - Cas des arbres de construction (CSG)

Intersection (R : rayon, A : arbre) → liste

```
{  
  si A est une primitive, retourner  $L = R \cap A$   
  sinon /* A = G % D */  
    {  
      LG ← intersection (R,G) ;  
      LD ← intersection (R,D) ;  
      retourner (LG % LD);  
    }  
}
```

## 1.3 - Ombres portées

➤ rayons d'ombrage ... si sources lumineuses ponctuelles

sinon

➤ méthodes des cônes

➤ méthode stochastique

# 1.4 - Temps de calcul

$p$  = nombre de pixels

$n$  = nombre d'objets

$n_a$  = nombre de pixels nécessitant un calcul d'éclairage

nombre de calculs d'intersection :

- si la scène est ombrée :  $n(p+n_a)$  calculs d'intersection
- si les objets sont réfléchissants et si le niveau de profondeur des réflexions est  $k \Rightarrow n[p+(k+1)n_a]$  calculs d'intersections

exemple:

$$p = 10^6, n = 10^3, n_a = 4 \times 10^5, k = 2$$

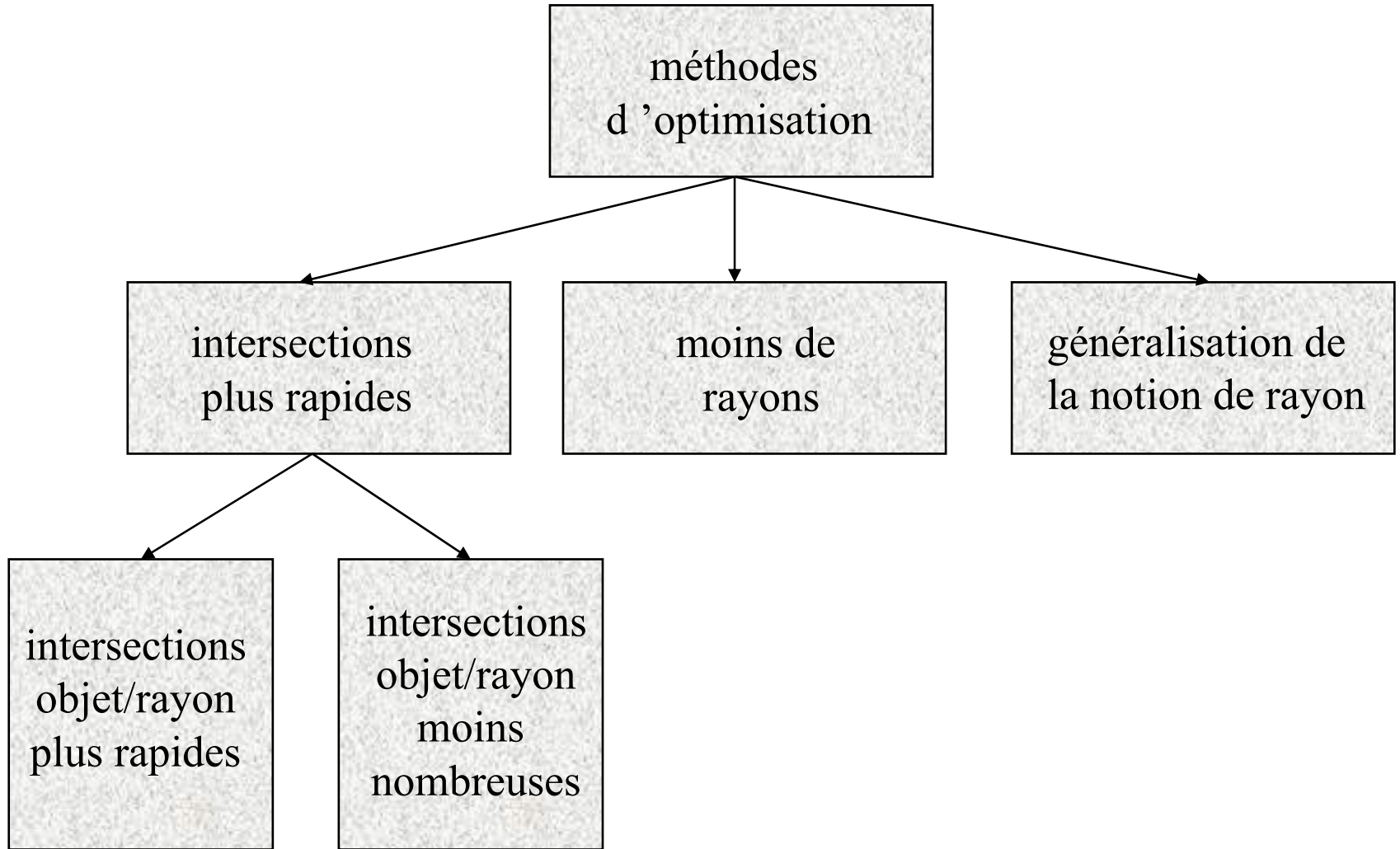
$$10^3 (10^6 + 12 \times 10^5) = \mathbf{2,2 \times 10^9 \text{ calculs}}$$

# 2 - OPTIMISATIONS

On peut chercher à diminuer :

- le temps de calcul
- le nombre de pixels à étudier
- le nombre d'intersections à tester





# 3 - Calculs d'intersection (intersections plus rapides)

## 3.1 - Principe du calcul dans un repère local

rayon  $R(t) = P_0 + t D$  où  $P_0$  : origine du rayon

$D = (dx, dy, dz)$  : vecteur directeur du rayon

$t \geq 0$

scène décrite dans repère du monde  $R_M$ , chaque primitive décrite dans son repère local  $R_L \Rightarrow 2$  matrices de transformation connues

$M$  : matrice de passage de  $R_M$  à  $R_L$

$M^{-1}$  : matrice de passage de  $R_L$  à  $R_M$

procédure :

1 - calcul de l'équation du rayon dans  $R_L$  :  $R'(t) = M \cdot R(t)$

2 - calcul de l'intersection rayon-objet dans  $R_L$

3 - calcul de la normale dans  $R_L$

4 - calcul de la normale dans  $R_M$  par changement de repère

## 3.2 - Cube unitaire

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$t_1 = (1 - x_0) / dx$$

$$t_2 = -x_0 / dx$$

$$[I_x, M_x] = [\min(t_1, t_2), \max(t_1, t_2)]$$

$$[I, M] = [\max(I_x, I_y, I_z), \min(M_x, M_y, M_z)]$$

si  $I \geq M$  il y a intersection

sinon l'intersection n'existe pas

### 3.3 - Sphère unitaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

substitution de  $R(t) \Rightarrow$

$$t^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2t(x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

### 3.4 - Cylindre unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ 0 \leq z \leq 1 & (2) \end{cases}$$

substitution de  $R(t)$  dans (1)  $\Rightarrow$

$$t^2(dx^2 + dy^2) + 2t(x_0 dx + y_0 dy) + x_0^2 + y_0^2 - 1$$

$\Rightarrow$  intervalle  $[t_1, t_2]$

substitution de  $R(t)$  dans (2)  $\Rightarrow$

$$B = \frac{(1 - z_0)}{dx}$$

$$A = \frac{-z_0}{dx}$$

$$t_3 = \min(A, B)$$

$$t_4 = \max(A, B)$$

$$[I, M] = [\max(t_1, t_3), \min(t_2, t_4)]$$

### 3.5 - Cône unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

## 3.6 - Polygone : 2 étapes

- intersection entre le rayon et le plan du polygone
- test pour savoir si le point trouvé est intérieur au polygone

méthode de Snyder et Badouel pour un triangle  $P_0, P_1, P_2$

## 1ère étape :

$$\text{normale: } \vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$$

équation du plan du triangle :

$$P \bullet \vec{N} + d = 0, \text{ avec } d = -P_0 \bullet \vec{N} \quad (1)$$

$$\text{équation du rayon: } R(t) = O + \vec{D}t \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow t = (d - \vec{N} \bullet O) / \vec{N} \bullet \vec{D}$$

si  $\vec{N} \bullet \vec{D} = 0$ , pas d'intersection

si  $t \leq 0$ , intersection rejetée

## 2ème étape :

$$P \in \text{triangle si } P_0P = \alpha P_0P_1 + \beta P_0P_2 \quad (3)$$

$$\text{avec } \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_0 = \alpha (x_1 - x_0) + \beta (x_2 - x_0) \\ y_P - y_0 = \alpha (y_1 - y_0) + \beta (y_2 - y_0) \\ z_P - z_0 = \alpha (z_1 - z_0) + \beta (z_2 - z_0) \end{cases}$$

pour réduire ce système à 2 équations à 2 inconnues, on projette ce triangle suivant un des axes, celui de plus grande projection

$\Rightarrow$  choix de  $i_0$

$i_0 = 0$  si  $|N_x|$  maximum

$i_0 = 1$  si  $|N_y|$  maximum

$i_0 = 2$  si  $|N_z|$  maximum



soient  $i_1 \neq i_2 \in \{0,1,2\} - i_0$

posons

$$u_0 = P_{i_1} - P_{0i_1}, u_1 = P_{1i_1} - P_{0i_1}, u_2 = P_{2i_1} - P_{0i_1}$$

$$v_0 = P_{i_2} - P_{0i_2}, v_1 = P_{1i_2} - P_{0i_2}, v_2 = P_{2i_2} - P_{0i_2}$$

(3) devient :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha u_1 + \beta u_2 \\ v_0 = \alpha v_1 + \beta v_2 \end{cases}$$

d' où

$$\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}} \quad \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_0 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}}$$

## 3.7 - Tore

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - r^2\right)^2 - 4\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

substitution de R(t) => équation 4ème degré

## 3.8 - Surface algébrique

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k$$

substitution => équation de degré  $l+m+n$

résolution par Newton, Laguerre ou Bairstow

MAIS le choix de la valeur initiale est important (par exemple, méthode des intervalles)

## 3.9 - Surfaces bicubiques

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(u) B_j(v) P_{ij}$$

où  $P_{ij}$  : points de contrôle de la surface  
 $B_i(u)$ ,  $B_j(v)$  : fonctions de mélange

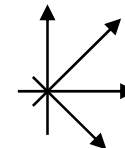
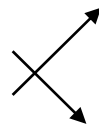
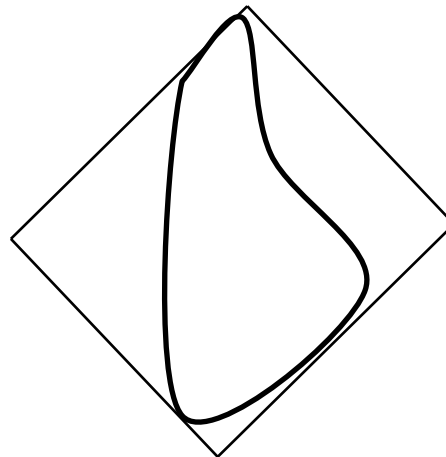
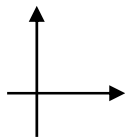
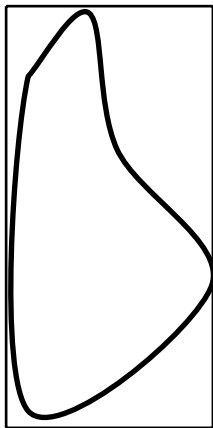
- décomposition en polygones plans
- subdivision récursive en sous-carreaux
- méthodes numériques : utilisation de résultants

# 4. Intersections moins nombreuses

## 4.1 - Utilisation de boîtes englobantes

=> structuration des données

- parallélépipèdes
- sphères ou ellipsoïdes
- polyèdres



□ tranches d'espace

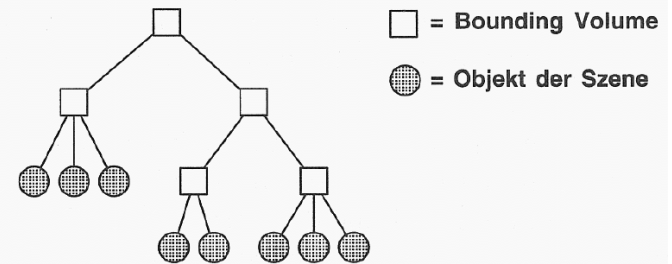
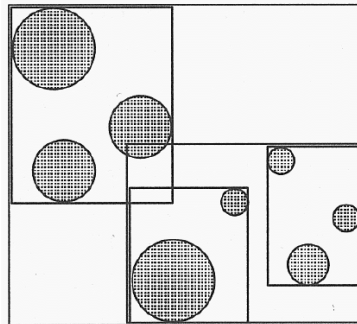
**avantages :**

s'applique à tous les types de rayons

**inconvénients :**

choix du type d'englobant (surtout pour les arbres de construction)

## 4.2 - Bounding Volume Hierarchies (BVH)



## □ Avantages :

- Très bonne adaptativité
- Traversée efficace  $O(\log N)$

## □ Problème :

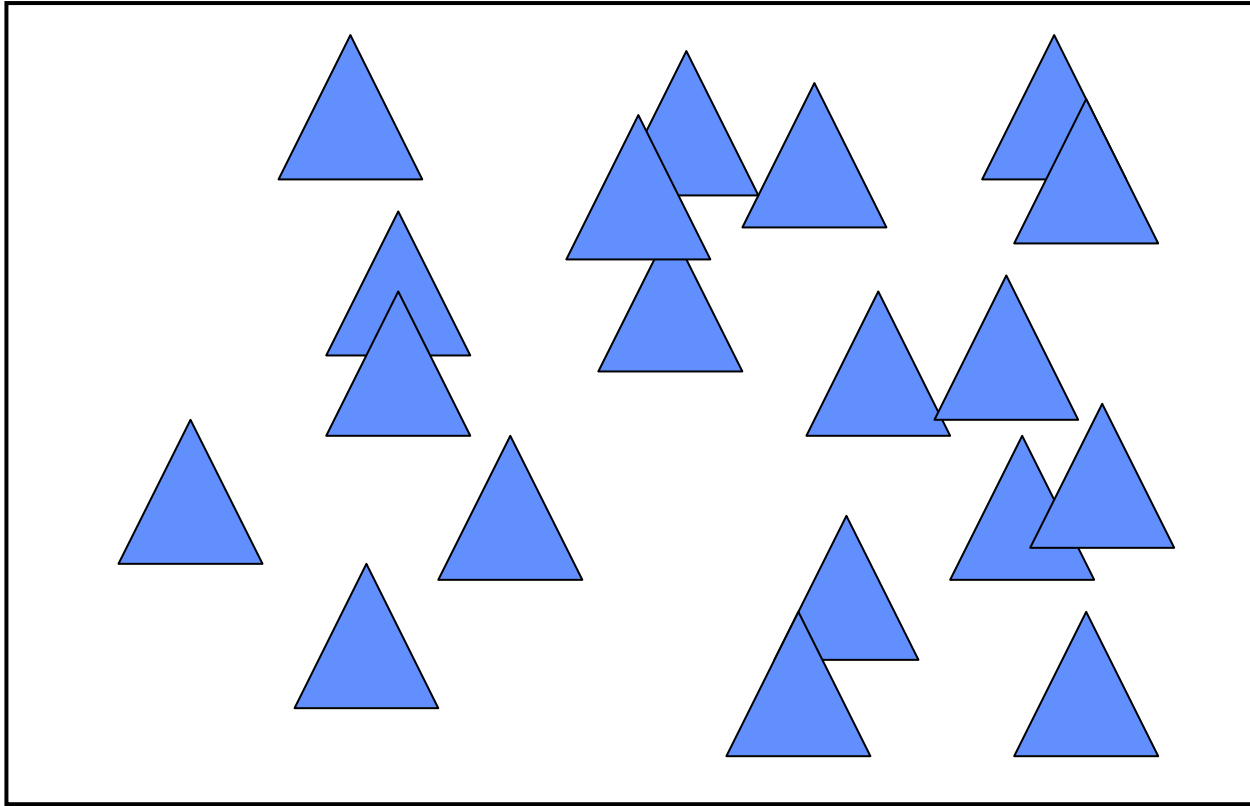
- Comment construire la hiérarchie ?

## 4.2 - Recherche d'une partition

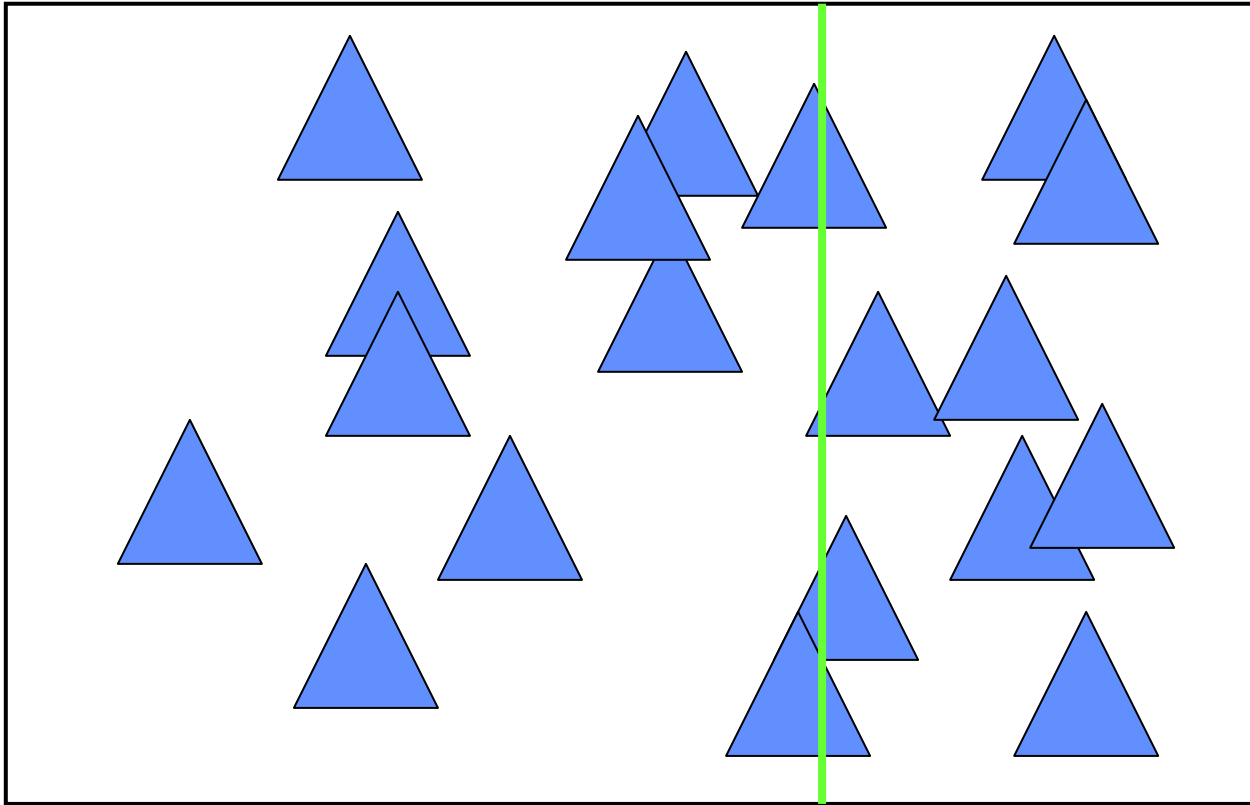
=> algorithmes de suivi de rayon

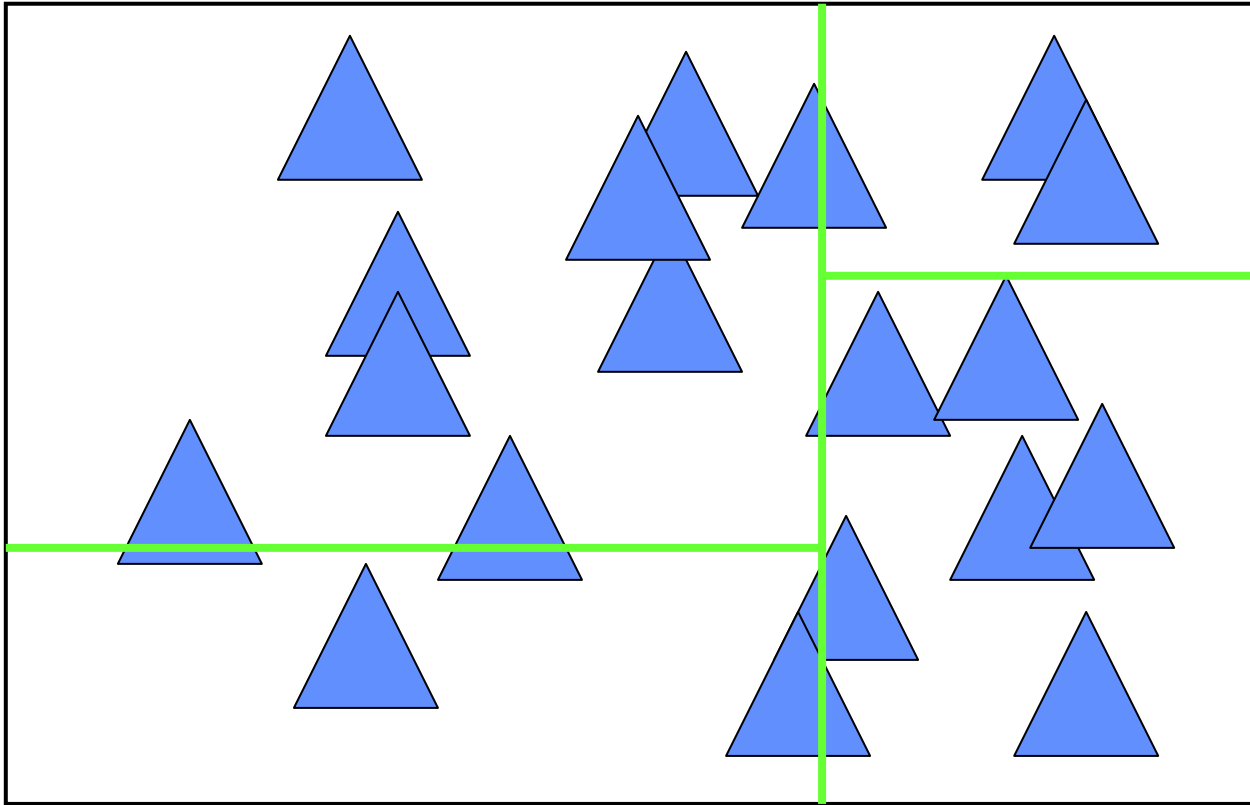
### 4.2.1 de $\mathbb{R}^3$

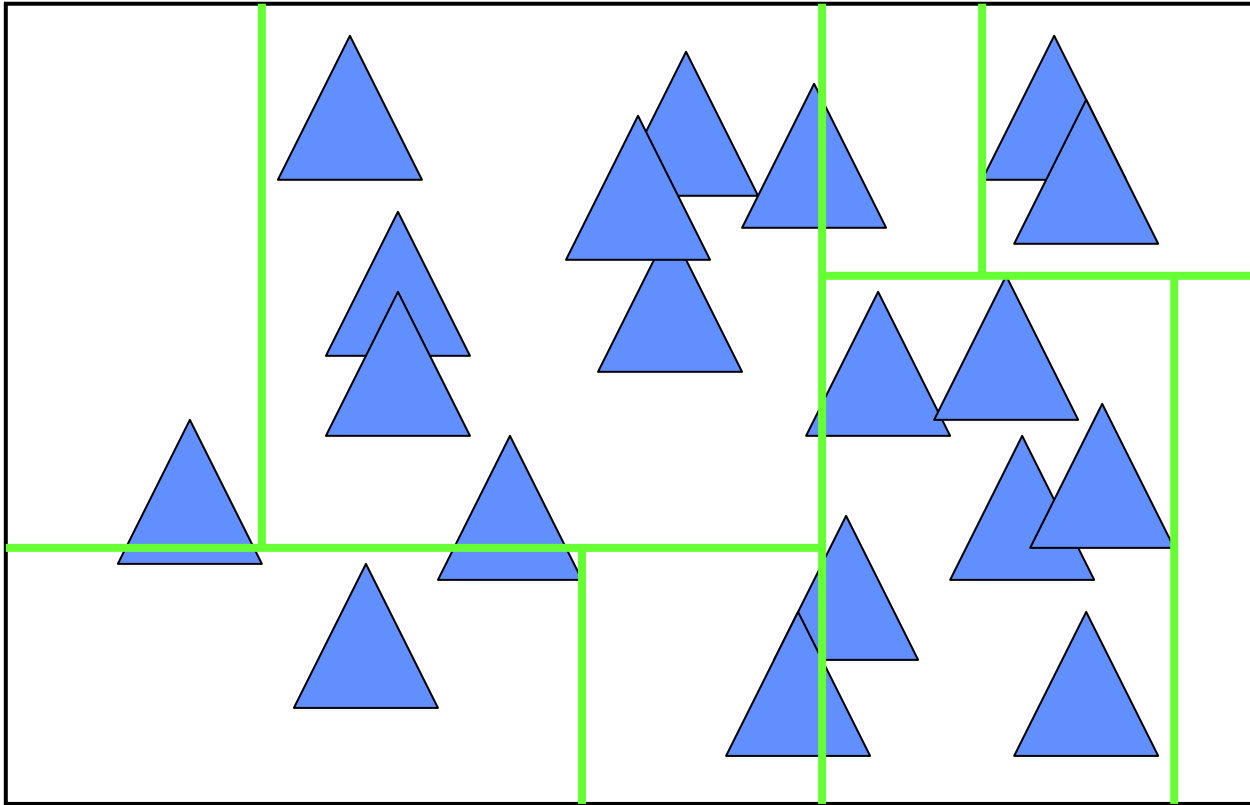
- par une grille
- par un arbre octal
- par un kd-arbre

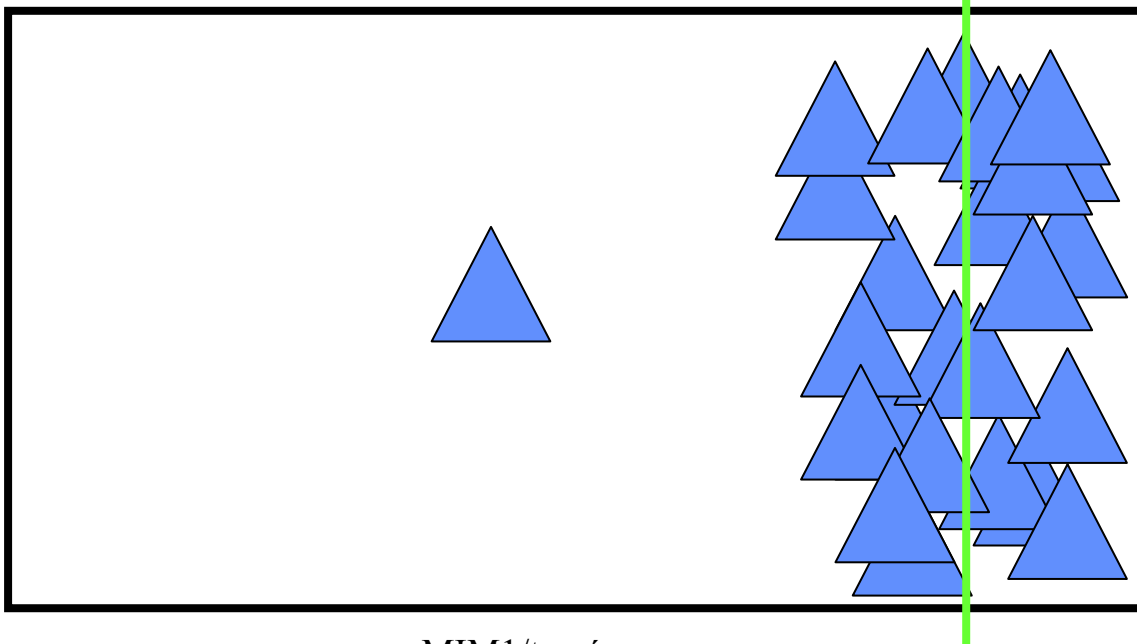
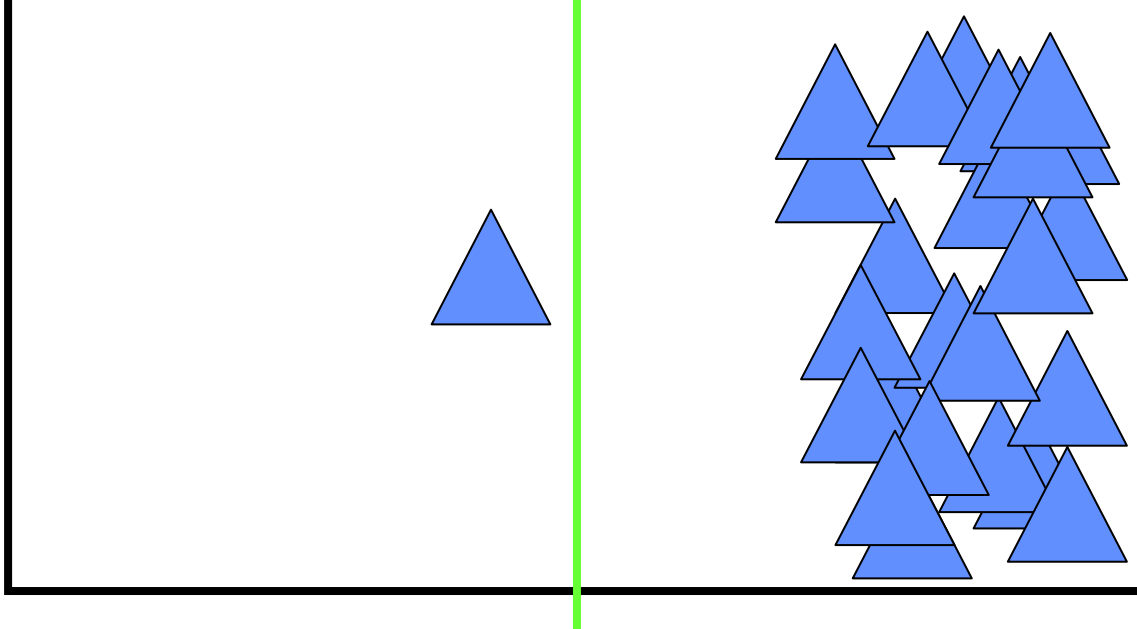












*heuristique SAH* (Surface Area Heuristic) :

- la chance qu'un rayon heurte une cellule est liée à la surface de son aire :

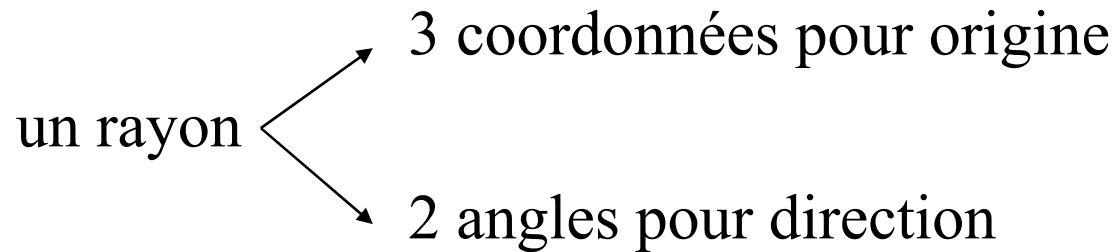
$$\text{prob}(\text{toucher objet dans cellule}) = \frac{\text{surface objet}}{\text{surface cellule}}$$

- le coût de traversée d'une cellule est approximé par la formule

$$\begin{aligned} \text{coût}(\text{cellule}) &= \text{coût}_{\text{trav}} + \text{prob}(\text{toucher fils\_gauche}) * \\ &\text{coût}(\text{fils\_gauche}) + \text{prob}(\text{toucher fils\_droit}) * \text{coût}(\text{fils\_droit}) \end{aligned}$$

## 4.2.2 Méthodes directionnelles

- ❑ cube directionnel
- ❑ tampon de lumière
- ❑ partition de  $\mathbb{R}^5$



## 5. Diminution du nombre de rayons lancés

□ exploitation de la cohérence

↓ des objets

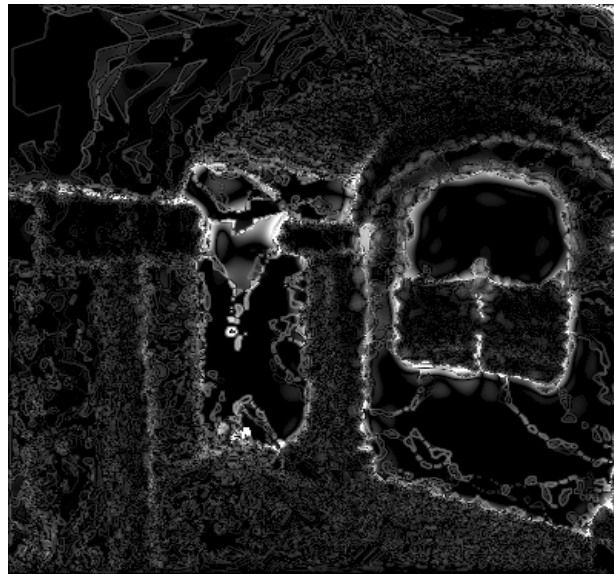
↓ de l'image

↓ des rayons

↓ des données

□ méthodes statistiques

↓ échantillonnage de l'écran







## 6. Généralisation de la notion de rayon

lancer de cônes

uniquement plans et sphères

lancer de faisceaux

uniquement facettes polygonales

instructions SIMD