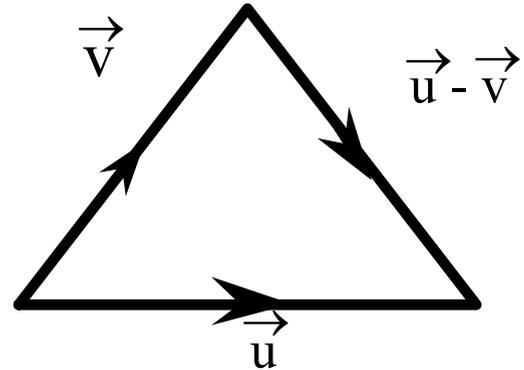
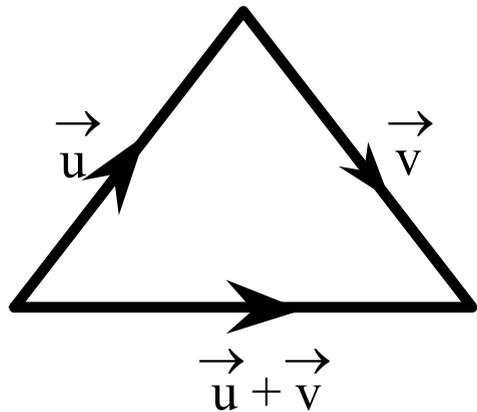
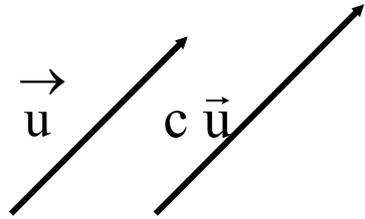


GEOMETRIE

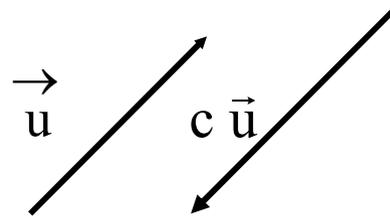
1. Espaces vectoriels

Un espace vectoriel est une collection d'objets, les vecteurs, pour lesquels les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication par un scalaire sont définies





$$c > 0$$



$$c < 0$$

Une transformation L est dite **linéaire** si

$$L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$$

$$L(c\vec{u}) = cL(\vec{u})$$

2. Espaces affines

2.1. Points et vecteurs

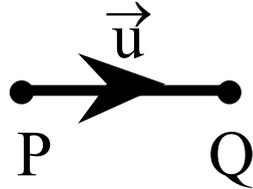
- ☛ un point a une position, ni direction, ni longueur
- ☛ un vecteur a une direction et une longueur, pas de position

Remarques :

- ☛ si une origine est spécifiée, un point peut-être représenté par un vecteur.
- ☛ si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \text{ et } \text{dir}(\vec{u}) = \text{dir}(\vec{v})$$

1.2. Addition et soustraction



- $P + \vec{u}$ point
- $Q - P$ vecteur
- Si $\vec{u} = Q - P$, $Q = P + \vec{u}$, $P = Q - \vec{u}$
- Remarque : $P + Q$ n'a pas de sens.

1.3. Multiplication scalaire

$$1 \cdot P = P$$

$$0 \cdot P = \vec{0}$$

$$c \cdot P \text{ indéfini si } c \neq 0 \text{ et } c \neq 1$$

Soient P_0, \dots, P_n des points, c_0, \dots, c_n des scalaires

$$\sum_{k=0}^n c_k P_k = \left(\sum_{k=0}^n c_k \right) P_0 + \sum_{k=1}^n c_k (P_k - P_0)$$

Le premier terme n'a de sens que si et seulement si

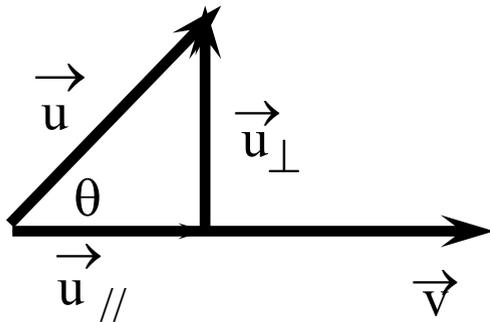
$$\sum_{k=0}^n c_k = 0 \text{ ou } 1$$

si $\sum_{k=0}^n c_k = 0$, $\sum_{k=0}^n c_k P_k = \sum_{k=1}^n c_k (P_k - P_0)$ est un vecteur

si $\sum_{k=0}^n c_k = 1$, $\sum_{k=0}^n c_k P_k = P_0 + \sum_{k=1}^n c_k (P_k - P_0)$ est un point

Exemples : milieu du segment PQ : $\frac{P+Q}{2}$
 barycentre du triangle PQR : $\frac{P+Q+R}{3}$

1.4. Produit scalaire

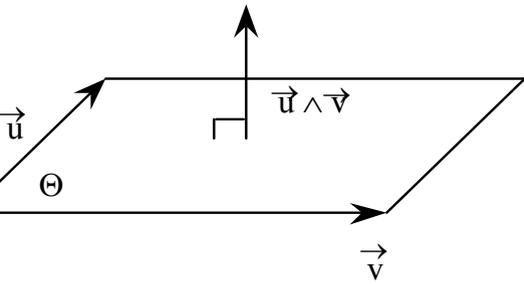


$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\vec{u}_{\parallel} = \frac{(\vec{u} \bullet \vec{v})}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \frac{(\vec{u} \bullet \vec{v})}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$$

1.5. Produit vectoriel



$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

$\text{dir}(\vec{u} \wedge \vec{v})$ perpendiculaire au plan (\vec{u}, \vec{v})

$$\text{signe}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = 1$$

Propriétés :

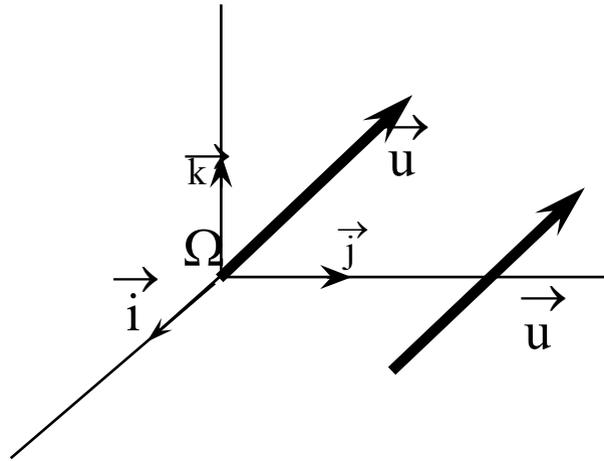
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$$

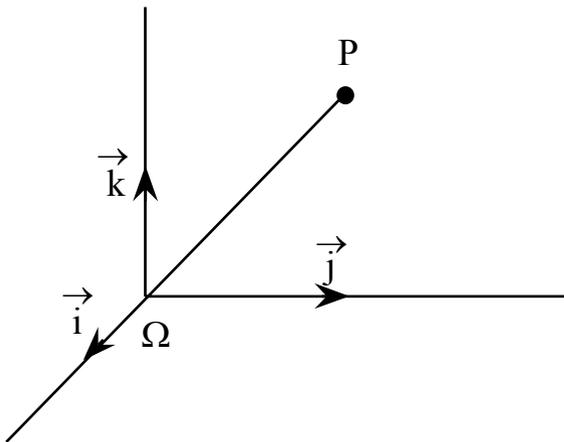
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v}) \vec{w}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w}) \vec{u}$$

1.6. Coordonnées cartésiennes



$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \\ &= (u_1, u_2, u_3)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}P &= \Omega + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} \\ &= (p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$$

Exemples d'applications :

$$P = (p_1, p_2, p_3)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\begin{aligned} P + \vec{u} &= \Omega + p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k} + u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \\ &= \Omega + (p_1 + u_1) \vec{i} + (p_2 + u_2) \vec{j} + (p_3 + u_3) \vec{k} \\ &= (p_1 + u_1, p_2 + u_2, p_3 + u_3) \end{aligned}$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{o}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

3 - Transformations affines et coordonnées affines

définition : une transformation T est dite **affine** si :

- l'image par T d'un point est un point
- l'image par T d'un vecteur est un vecteur

- $T\left(\sum_k c_k P_k\right) = \sum_k c_k T(P_k)$ (si les expressions existent)

Corollaire :

Si T est affine, alors :

T est continue

l'image d'une droite par T est une droite ou un point

Soit T une transformation affine

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \Omega + p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}$$

$$T(P) = T(\Omega) + p_1 T(\vec{i}) + p_2 T(\vec{j}) + p_3 T(\vec{k})$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$

$$T(\vec{u}) = u_1 T(\vec{i}) + u_2 T(\vec{j}) + u_3 T(\vec{k})$$

Donc T est complètement déterminée par

$$T(\Omega), T(\vec{i}), T(\vec{j}), T(\vec{k})$$

$$T(P) = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = T(P \quad 1)^t$$

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = T(\vec{u} \quad 0)^t$$

Les notations $(P \ 1)$ et $(\vec{u} \ 0)$ sont appelées **coordonnées homogènes**.

Comme $T(\vec{i}), T(\vec{j})$ et $T(\vec{k})$ sont des vecteurs et $T(\Omega)$ un point, on peut écrire :

$$T = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{i}) = t_{11}\vec{i} + t_{21}\vec{j} + t_{31}\vec{k}$$

$$T(\vec{j}) = t_{12}\vec{i} + t_{22}\vec{j} + t_{32}\vec{k}$$

$$T(\vec{k}) = t_{13}\vec{i} + t_{23}\vec{j} + t_{33}\vec{k}$$

$$T(\Omega) = \Omega + t_{14}\vec{i} + t_{24}\vec{j} + t_{34}\vec{k}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $T(P,1) = T \begin{pmatrix} P & 1 \end{pmatrix}^t$

$$T(\vec{u},0) = T \begin{pmatrix} \vec{u} & 0 \end{pmatrix}^t$$

Exemple : Translation de vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, 0)$

$$T(\vec{i}) = \vec{i}$$

$$T(\vec{j}) = \vec{j}$$

$$T(\vec{k}) = \vec{k}$$

$$T(\Omega) = \Omega + \vec{u}$$

$$\text{donc } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Changements de repère

4.1. Formule de changement de repère

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ deux repères.

$$P = O + p_i \vec{i} + p_j \vec{j} + p_k \vec{k}$$

$$\vec{u} = u_i \vec{i} + u_j \vec{j} + u_k \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k}$$

$$\vec{w} = w_i \vec{i} + w_j \vec{j} + w_k \vec{k}$$

Soit M un point quelconque.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$M = O + m_i \vec{i} + m_j \vec{j} + m_k \vec{k}$$

Dans $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$M = P + m_u \vec{u} + m_v \vec{v} + m_w \vec{w}$$

Cherchons la relation qui lie (m_i, m_j, m_k) et (m_u, m_v, m_w) :

$$\begin{aligned} M &= P + m_u \vec{u} + m_v \vec{v} + m_w \vec{w} \\ &= (O + p_i \vec{i} + p_j \vec{j} + p_k \vec{k}) + m_u (u_i \vec{i} + u_j \vec{j} + u_k \vec{k}) \\ &\quad + m_v (v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k}) + m_w (w_i \vec{i} + w_j \vec{j} + w_k \vec{k}) \\ &= P + (p_i + m_u u_i + m_v v_i + m_w w_i) \vec{i} + (p_j + m_u u_j + m_v v_j + m_w w_j) \vec{j} \\ &\quad + (p_k + m_u u_k + m_v v_k + m_w w_k) \vec{k} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \end{pmatrix}$$

Avec des matrices 4-4, on a :

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i & p_i \\ u_j & v_j & w_j & p_j \\ u_k & v_k & w_k & p_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Usage des changements de repère

Soit T une transformation géométrique qui s'exprime facilement dans le repère $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$M = (m_u, m_v, m_w)$ dans le repère $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \Rightarrow$
 $M' = (m'_u, m'_v, m'_w)$ dans le repère $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec

$$\begin{pmatrix} m'_u \\ m'_v \\ m'_w \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les calculs dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$M = (m_i, m_j, m_k)$$

Quelles sont les coordonnées de $M' = T(M)$
dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

on exprime M dans $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

on calcule M ' dans le même repère

$$\begin{pmatrix} m'_u \\ m'_v \\ m'_w \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

on exprime M dans

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix} = C T C^{-1} \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Espaces projectifs et transformations projectives

5.1. Points affines et points à l'infini

Il existe deux types de points dans un espace projectif :

- un **point à l'infini** est représenté par un vecteur sans longueur
soit $[\vec{v}, 0] = [c\vec{v}, 0]$ si $c \neq 0$
- un **point affine** vérifie $[P, 1] = [cP, c]$ si $c \neq 0$

⇒ notion de **coordonnées homogènes**

toute paire $[X, \omega] \neq [0, 0]$ a un sens. ω est appelée coordonnée homogène

5.2. *transformations projectives*

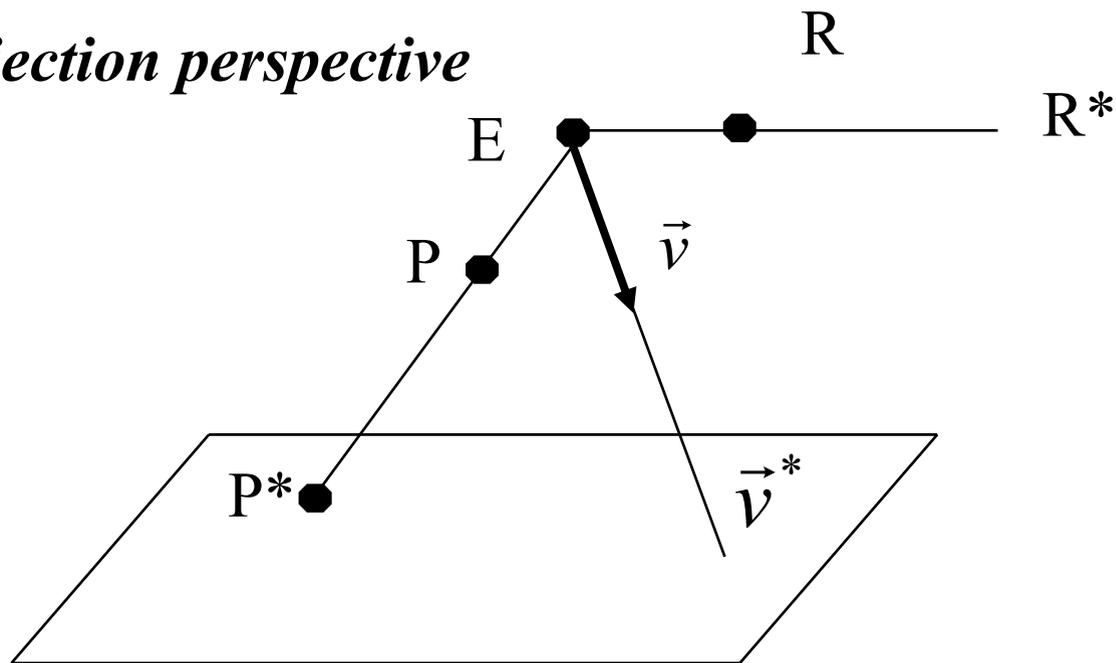
T est une transformation **projective** si

$$T[c\vec{v}, 0] = c' T[\vec{v}, 0] \text{ avec } c \text{ et } c' \neq 0$$

$$T[cP, 1] = c' T[P, 1] \text{ avec } c \text{ et } c' \neq 0$$

donc toute matrice 4-4 représente une transformation projective (on peut remarquer que les transformations affines sont un cas particulier)

5.3. Projection perspective



un plan S dans un espace projectif a pour équation :

$$Ax + By + Cz + D\omega = 0$$

$$\text{soit } M \bullet X = 0 \text{ avec } M = [A, B, C, D]$$

$$X = [x, y, z, \omega]^t$$

Remarque : $M \cdot X = 0 \Rightarrow M \cdot cX = cM \cdot X = 0$, donc M et cM représentent le même plan projectif

Pour tout point projectif X , l'intersection X^* de la droite EX avec le plan S est donnée par :

$$X^* = [(X \bullet M)E - (E \bullet M)X]$$

en effet

$$\begin{aligned} M \bullet X^* &= M [(X \bullet M)E - (E \bullet M)X] \\ &= (X \bullet M)(M \bullet E) - (E \bullet M)(M \bullet X) = 0 \end{aligned}$$

donc $X^* \in S$

si $M' \bullet E = 0$ et $M' \bullet X = 0$ (1), alors $M' \bullet X^* = 0$:

$$M' \bullet X^* = (X \bullet M)(M' \bullet E) - (E \bullet M)(M' \bullet X) = 0$$

or (1) $\Leftrightarrow M'$ plan passant par E et X , donc contient EX

X^* n'est pas défini si $X=E$: $X^*=[0,0,0,0]$ n'est pas un point projectif

Remarques :

• l'image d'un point à l'infini est un point affine

$$\vec{v}^* = [(\vec{v} \bullet M)E - (E \bullet M)\vec{v}]$$

mais si $\vec{v} \in S, \vec{v} \bullet M = 0 \Rightarrow$

$\vec{v}^* = -(E \bullet M)\vec{v}$ est un point à l'infini

- l'image d'un point affine est un point affine

$$P^* = [(P \bullet M)E - (E \bullet M)P]$$

mais si

$P \in \text{plan // à } S \text{ passant par } E$

$P \bullet M = E \bullet M$, donc $P^* = (E \bullet M)(E - P)$ est le point à l'infini dans la direction $E - P$

La matrice de projection est donnée par :

$$Persp = E^t * M - (E \bullet M)I$$

5. Visualisation 2D

Consiste, à partir d'une vue 2D (provenant par exemple, d'une application) définie dans le repère du monde, à obtenir une vue dans les coordonnées normalisées de l'écran.

La vue dans le monde sera appelée clôture et celle dans l'écran fenêtre .

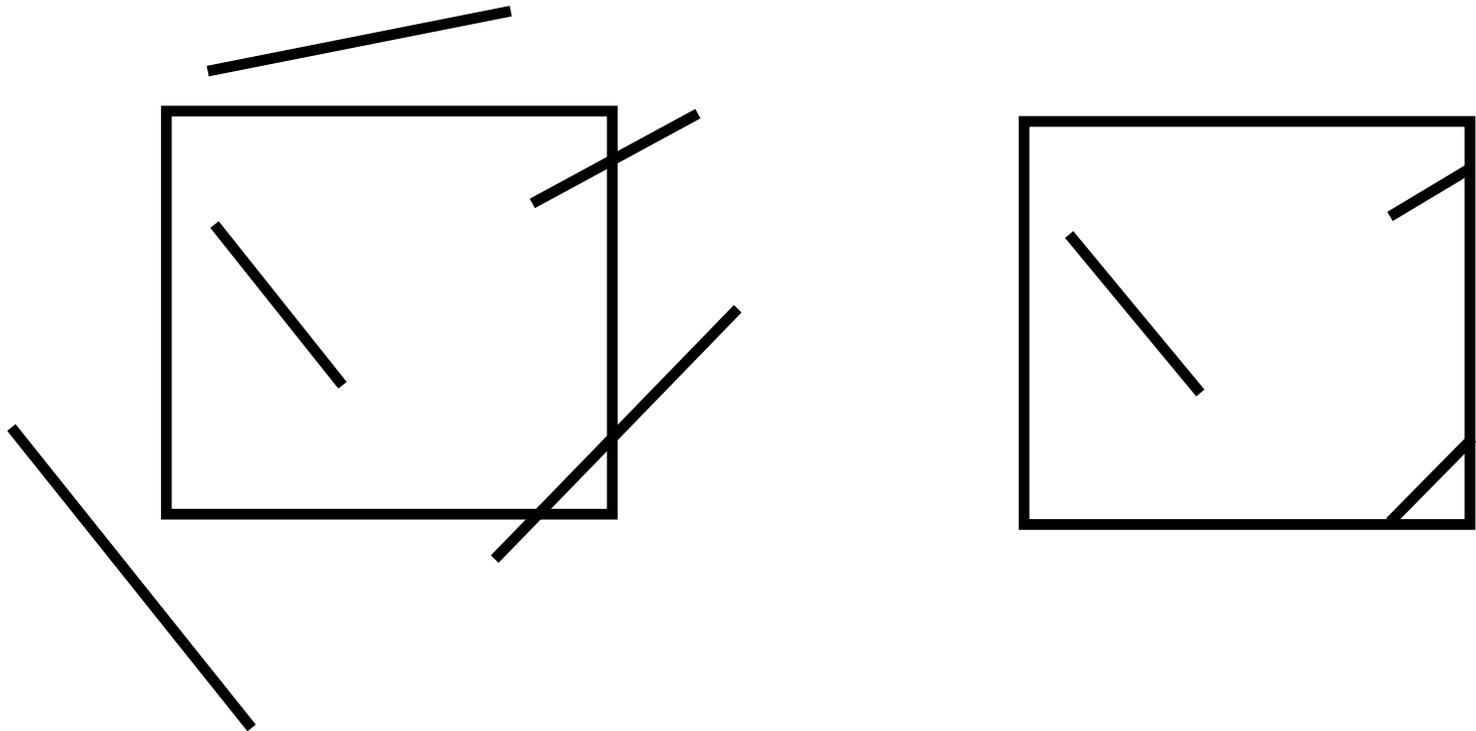
=> 2 opérations : la coupe et la transformation clôture - fenêtre .

5.1. Coupe (clipping)

on veut couper une image 2D contre une fenêtre $[x_{\min} .. x_{\max}, y_{\min} .. y_{\max}]$

cas des points : évident

cas des lignes :



➤ Méthode brutale

➤ Algorithme de Cohen - Sutherland

On code chaque extrémité M d'un segment par un mot $c(M)$ sur 4 bits :

bit 0 = 1 \Leftrightarrow M au dessus de la fenêtre

bit 1 = 1 \Leftrightarrow M au dessous de la fenêtre

bit 2 = 1 \Leftrightarrow M à droite de la fenêtre

bit 3 = 1 \Leftrightarrow M à gauche de la fenêtre.

Remarque : En fait,

bit 0 = signe de $(y_{\max} - y_M)$

bit 1 = signe de $(y_M - y_{\min})$

bit 2 = signe de $(x_{\max} - x_M)$

bit 3 = signe de $(x_M - x_{\min})$

Proposition : M est intérieur à la fenêtre $\Leftrightarrow C(M) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$

Corollaire : Un segment M_0M_1 est accepté \Leftrightarrow

$$C(M_0) = C(M_1) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

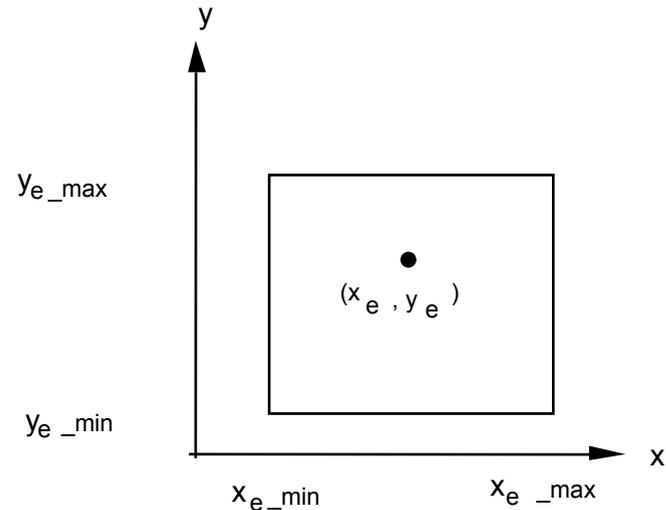
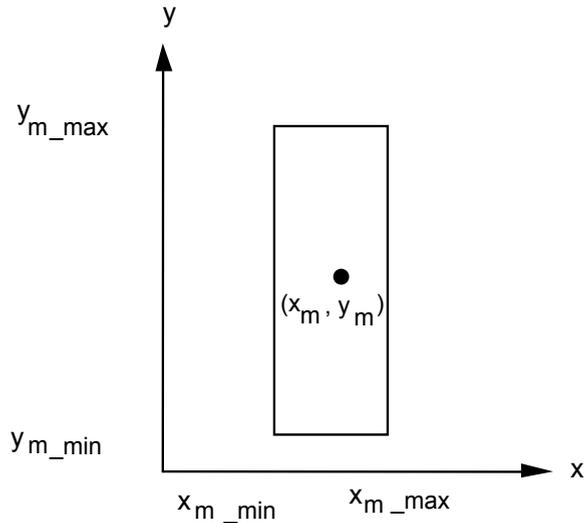
$C(M_0) \text{ AND } C(M_1) \neq (0 \ 0 \ 0 \ 0) \Rightarrow$ le segment M_0M_1 est rejeté

Dans les autres cas, il faut poursuivre la procédure :

- soit en cherchant l'intersection du segment avec les côtés de la fenêtre, en rejetant ce qui ne convient pas et en re-testant ;
- soit par dichotomie.

5.2. Transformation clôture - fenêtre

On veut appliquer le contenu d'une clôture sur une fenêtre de l'écran de telle sorte que l'on conserve les proportions :



$$\frac{x_m - x_{m_min}}{x_{m_max} - x_{m_min}} = \frac{x_e - x_{e_min}}{x_{e_max} - x_{e_min}}$$

donc

$$x_e = s_x (x_m - x_{m_min}) + x_{e_min}$$

6. Visualisation 3D

écran 2D \Rightarrow il faut une projection 3D \rightarrow 2D en plus de ce que l'on a vu pour la visualisation 2D.

Remarque : L'écran est plat \Rightarrow projections planes, mais il en existe d'autres (cf. cartographie)

2 classes de projections :

- ☛ projections perspectives : le centre de projection est à distance finie du plan de projection
- ☛ projections parallèles

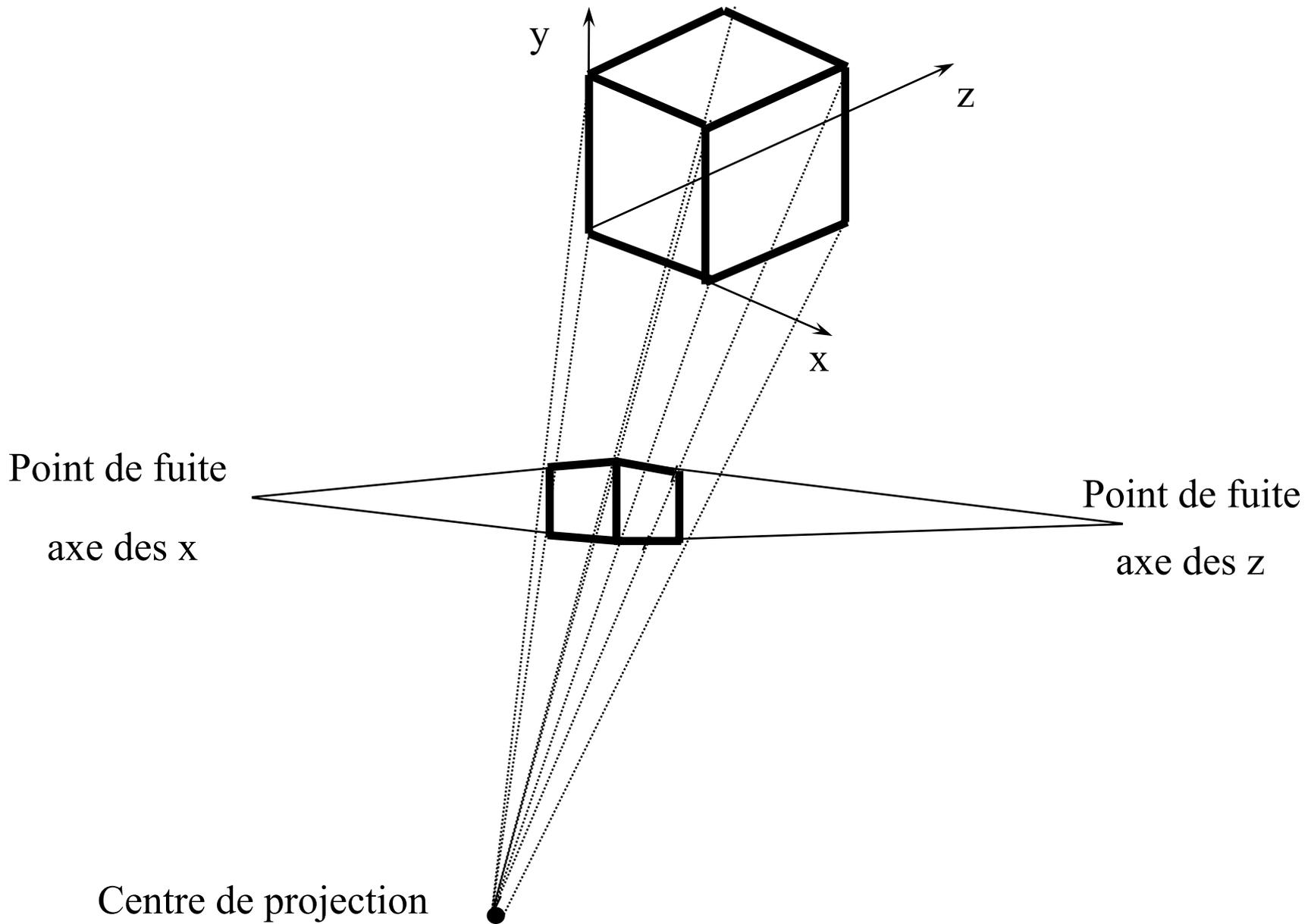
6.1 - Projections perspectives

Tout ensemble de droites en 3D qui ne sont pas parallèles au plan de projection convergeront en un point de fuite.

Si l'ensemble des lignes est parallèle à un des axes du repère

=> point de fuite principal

=> distinction suivant nombre de points de fuite principaux.



Calculs de projection

On suppose le plan de projection normal à l'axe des z en $z = d$ avec le centre de projection à l'origine.

triangles semblables \Rightarrow

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}, \text{ donc}$$

$$x_p = \frac{x}{z/d}, \quad y_p = \frac{y}{z/d}, \quad \text{donc}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : En général, on définit une pyramide de vision coupée par un plan près et un plan loin.

