

Calculs d'éclairage

1. Introduction

Trouver la "couleur" d'un point dans le monde

==> synthétiser la lumière en simulant ses effets

2. Modélisation des sources lumineuses

• 2.1 géométrie

☞ sources directionnelles

☞ sources ponctuelles

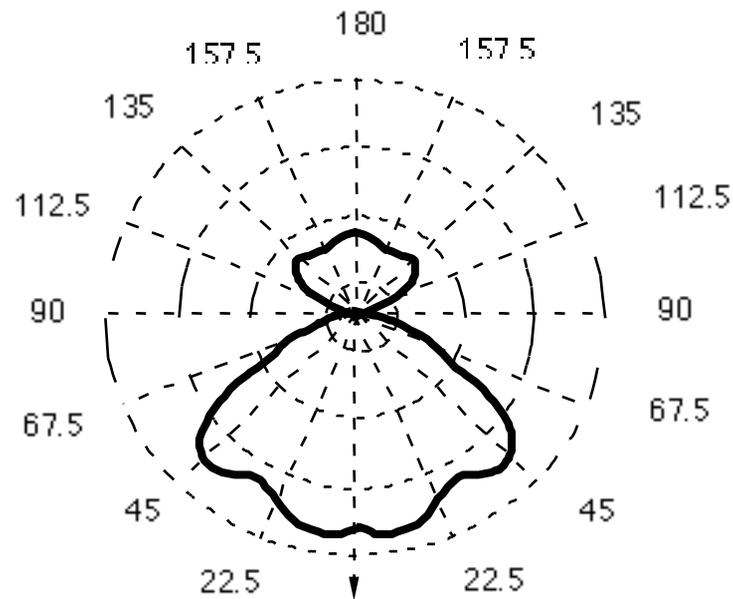
☞ sources linéaires

☞ sources surfaciques

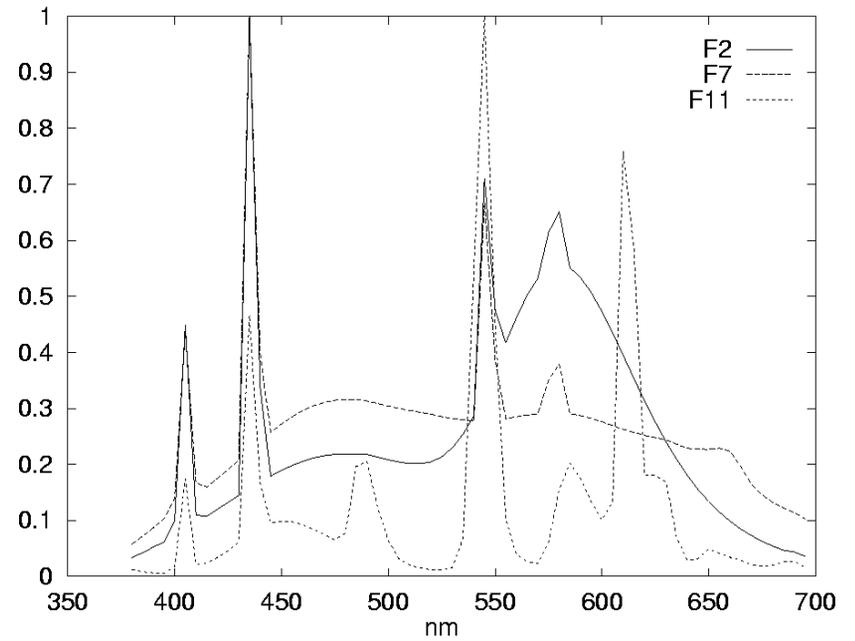
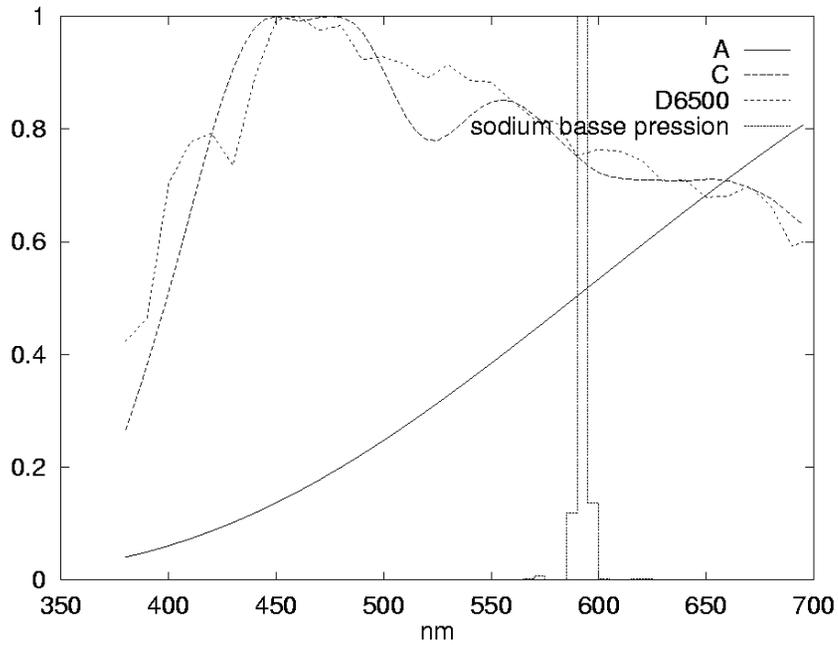
☞ sources volumiques

👉 2.2 distribution lumineuse d'intensité

👉 distribution spatiale



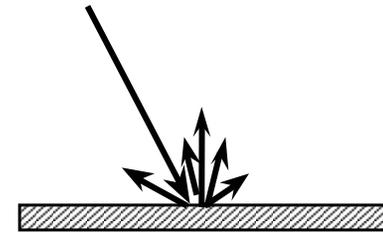
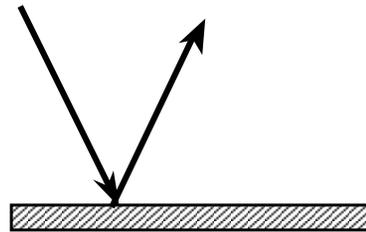
👉 distribution spectrale



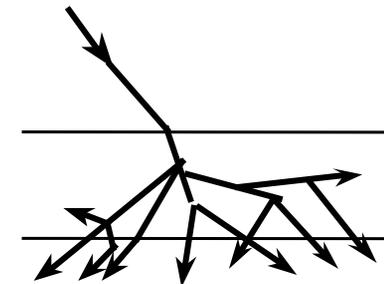
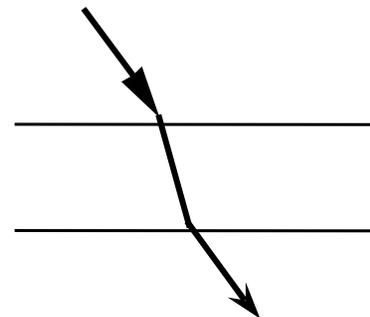
2.3 interaction de la lumière avec les objets

spéculaire

diffus



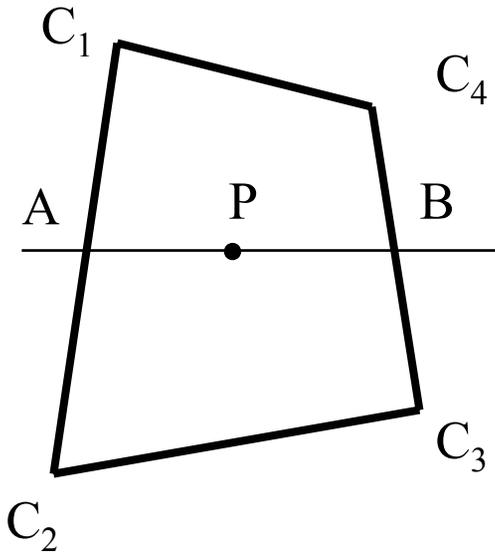
réflexion



transmission

3.Lissage

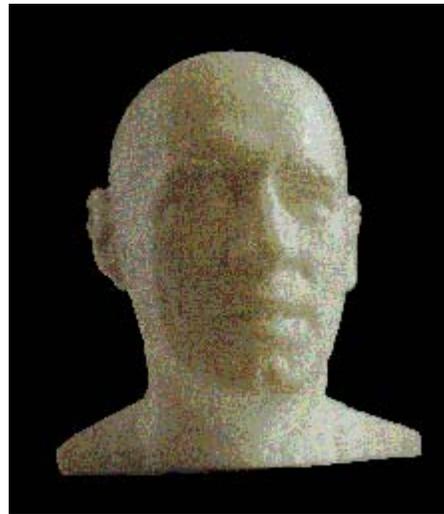
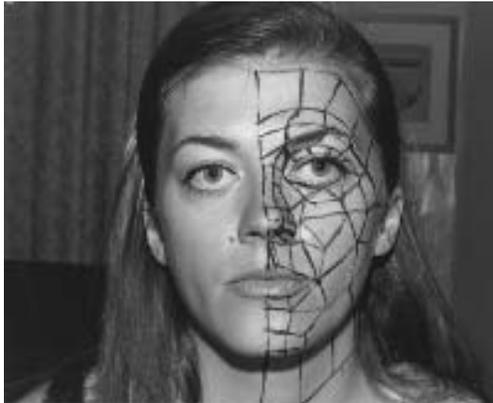
3.1. lissage de Gouraud : interpolation de couleur



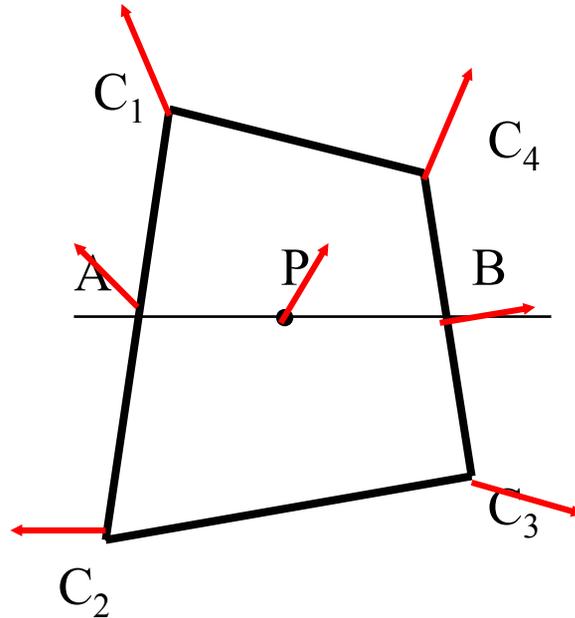
$$L_A = L_1 \frac{Y_A - Y_2}{Y_1 - Y_2} + L_2 \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 - Y_2}$$

$$L_B = L_1 \frac{Y_B - Y_3}{Y_4 - Y_3} + L_2 \frac{Y_4 - Y_B}{Y_4 - Y_3}$$

$$L_P = L_A \frac{X_B - X_P}{X_B - X_A} + L_B \frac{X_P - X_A}{X_B - X_A}$$



3.2. lissage de Phong : interpolation de normales



☛ avantages :

donne plus de réalisme (reflets)

☛ inconvénients :

temps de calcul plus élevés

bandes de Mach

non invariance par rotation de la caméra

4. Modèles d'éclairage

deux évolutions :

- de l'empirique vers le physique
- du local vers le global

4.1 Définitions

☛ flux énergétique $\Phi_e(\lambda)$

☛ luminance $L(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\Phi_e}{dA \cos\theta d\omega}$

cette notion approche de très près la perception visuelle de la couleur par l'homme

☛ éclairement

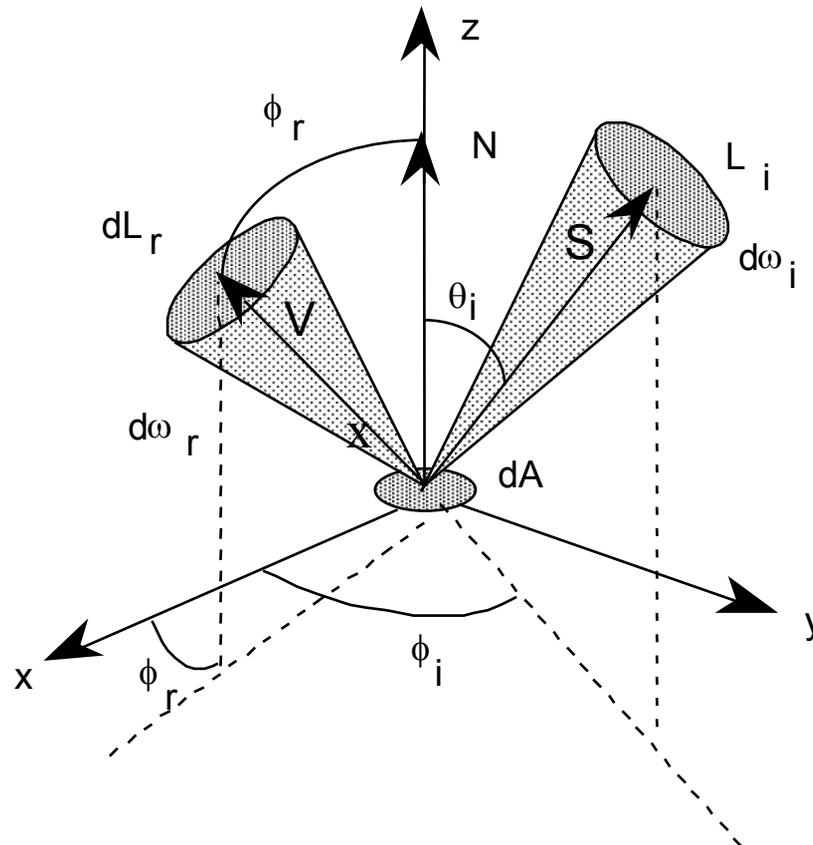
$$dE(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\Phi_e}{dA}$$

☛ intensité

$$dI(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\Phi_e}{d\omega}$$

➤ fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle (BRDF)

$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{dL_r(x, \vec{\omega}_r)}{L_i(x, \vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$



==> équation de réflectance

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(x, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

tout modèle physiquement plausible doit vérifier :

- la loi de conservation de l'énergie
- le principe de réciprocité de Helmholtz

$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = f_r(x, \vec{\omega}_r \rightarrow \vec{\omega}_i)$$

4.2 Modèles locaux

4.2.1 : Modèle primaire

chaque objet possède une intensité constante : k_i

\Rightarrow modélisation d'un monde :

sans interactions entre les objets

où chaque objet est une source lumineuse

4.2.2 Modèle de Lambert

$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{R}{\pi}$$

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = \frac{R}{\pi} \sum_j L_j(x, \vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

4.2.3 Modèle spéculaire

$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_r)}{\cos \theta_i} \delta(\phi_i - (\phi_r \pm \pi))$$

où δ est la fonction de Dirac

4.2.4 Modèle de Phong [PHON 75]

$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = d k_d + s k_s \frac{(\vec{N} \cdot \vec{H})^n}{(\vec{N} \cdot \vec{\omega}_i)}$$

où

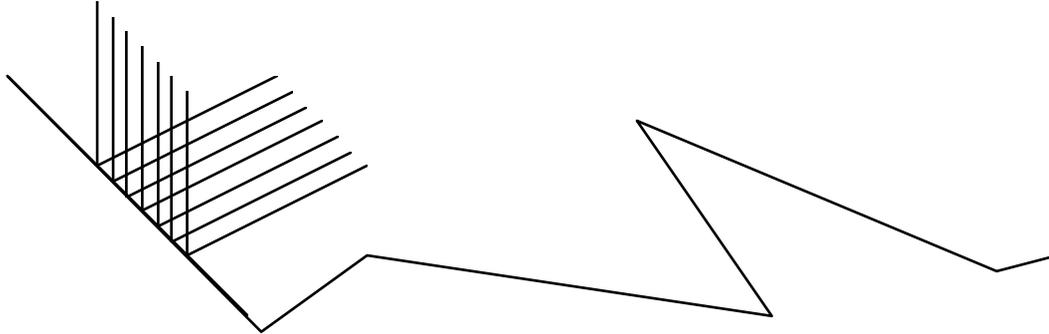
\vec{H} est le vecteur unitaire bissecteur entre $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_r$: $\vec{H} = \frac{\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_r}{\|\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_r\|}$

n est le coefficient de réflexion spéculaire

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = k_a L_a + [d k_d (\vec{N} \cdot \vec{\omega}_i) + s k_s (\vec{N} \cdot \vec{H})^n] L_i(x, \vec{\omega}_i)$$

4.2.5 Modèle de Torrance-Sparrow

modélisation de la surface par des micro-facettes



$$f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{d}{\pi} k_d + \frac{s}{4\pi (\vec{N} \cdot \vec{\omega}_i) (\vec{N} \cdot \vec{\omega}_r)} D(\alpha) F(\theta_i, \hat{n}) G(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r)$$

$D(\alpha)$ est la distribution de probabilité des micro-facettes ;

$F(\theta_i, \hat{n})$ est le facteur de Fresnel ;

$G(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r)$ est un facteur d'atténuation géométrique.

$d \in [0,1]$ est la proportion de la surface se comportant comme un réflecteur diffus ;

$s \in [0,1]$ est la proportion de la surface se comportant comme un réflecteur spéculaire ;

$$s + d = 1;$$

k_d est la proportion de lumière réfléchiée par le réflecteur diffus.

4.2.6 Modèles basés sur l'optique physique

4.3 Modèles globaux

les modèles locaux

- ☛ dépendent du point de vue ;
- ☛ ne prennent pas en compte les inter-réflexions entre les surfaces (terme ambient)
- ☛ ne tentent pas de tenir compte de l'équilibre énergétique

4.3.1 - Modèle du tracé de rayons

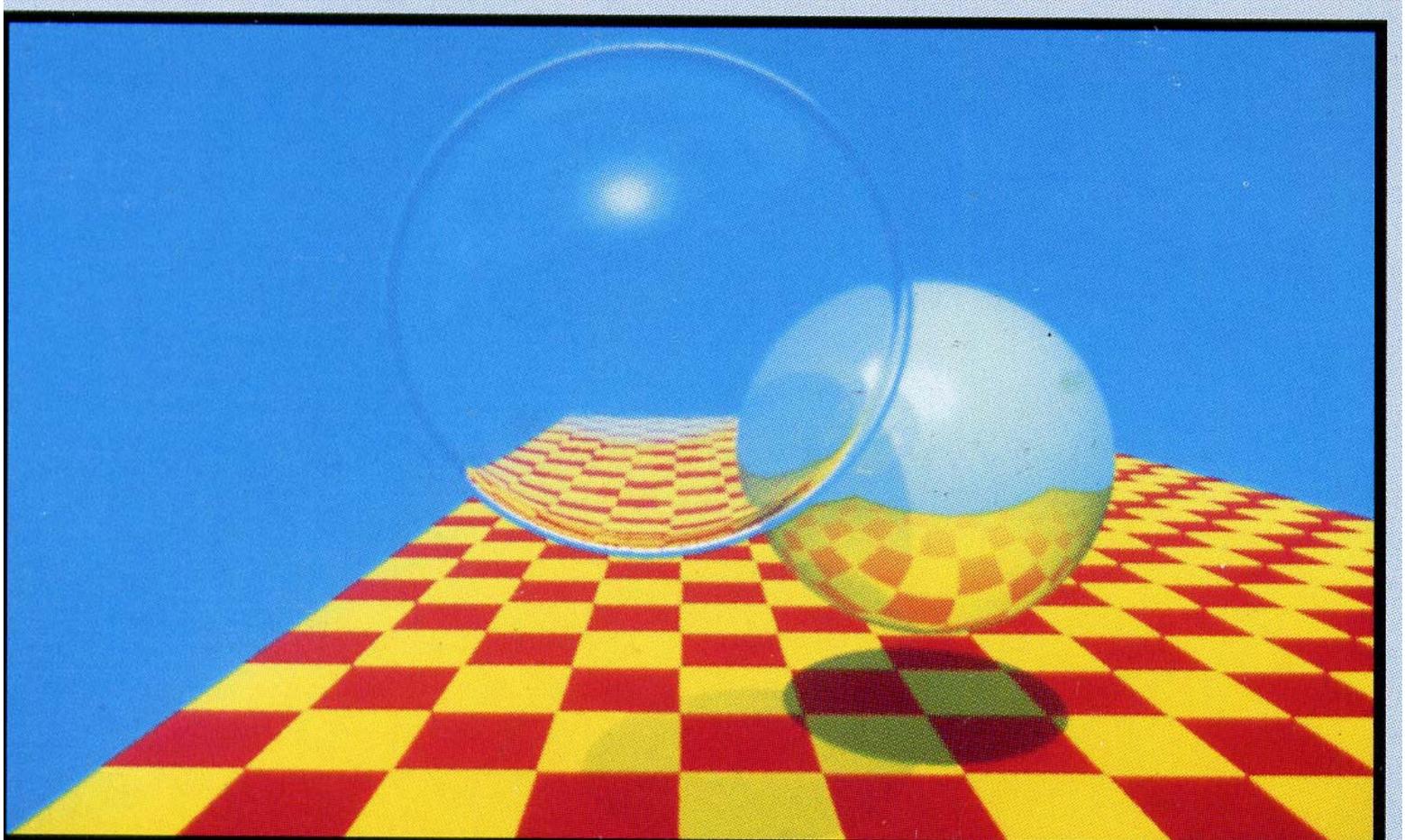
1^{ère} tentative pour tenir compte de l'environnement,
notamment des réflexions et des transmissions spéculaires

modèle local d'éclairage (Whitted)

$$L = L_a c + \sum_j [dc(\vec{N} \cdot \vec{L}) + s(\vec{N} \cdot \vec{H})^n (mc + (1 - m))]L_j + s(mc + (1 - m))S + tcT$$

remarques :

- ☛ le modèle est correct si toutes les surfaces sont spéculaires
- ☛ ne vérifie pas la conservation de l'énergie (terme ambiant)
- ☛ dépend de la position de l'observateur



d'après Whitted, Siggraph'1981



Trop faible
(valeur nulle)



Moyen



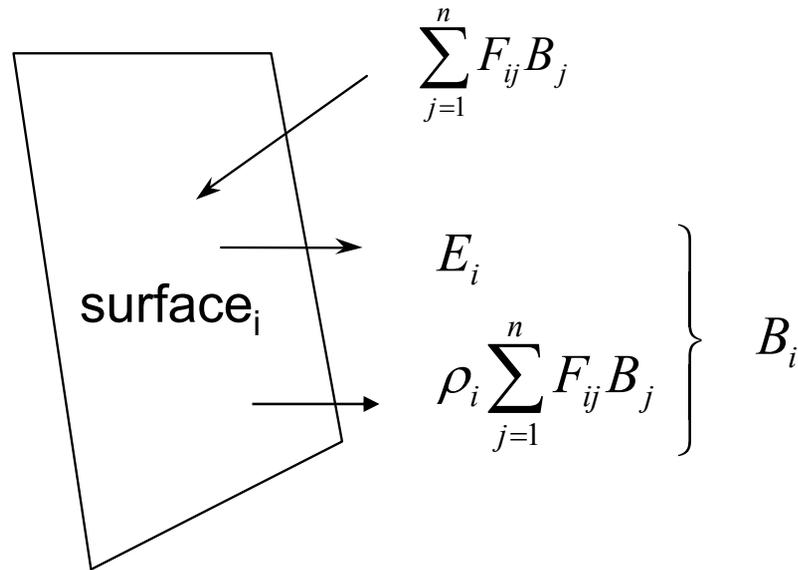
Trop élevé

⇒ conservation de l'énergie non assurée.

4.3.2 - Radiosité

4.3.2.1 - *Modèle initial*

- ☛ provient de la thermique
- ☛ idée fondamentale : équilibre énergétique
- ☛ suppose la scène close
- ☛ suppose toutes les surfaces diffuses



$$B_{dA_i} dA_i = E_{dA_i} + \rho_{dA_i} \int_j B_{dA_j} F_{dA_i dA_j} dA_j$$

où

B_{dA_i} = radiosité de l'élément dA_i

dA_i = aire élémentaire

E_{dA_i} = émission de la surface dA_i

ρ_{dA_i} = réflectivité

$F_{dA_i dA_j}$ = fraction de l'énergie quittant dA_j et atteignant dA_i

(facteur de forme)

Remarque : $F_{A_i A_j} A_i = F_{A_j A_i} A_j$

Si l'environnement est divisé en n carreaux, on obtient n équations

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j \neq i} F_{i,j} B_j$$

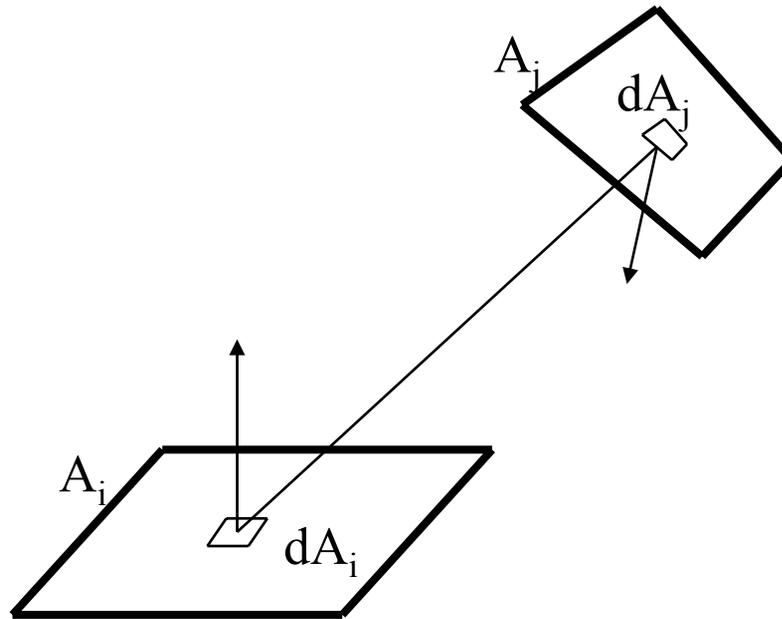
d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & -\rho_1 F_{1,2} & \dots & -\rho_1 F_{1,n} \\ -\rho_2 F_{2,1} & 1 & \dots & -\rho_2 F_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_n F_{n,1} & -\rho_n F_{n,2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}$$

Remarque : $\sum_{j \neq i} F_{i,j} = 1$ et $\rho_i \leq 1$

\Rightarrow système soluble par Gauss-Seidel, par exemple

MAIS facteurs de forme inconnus

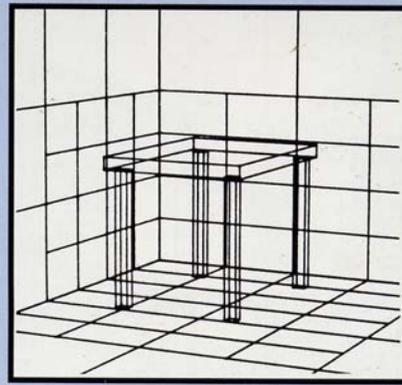


$$F_{dA_i, dA_j} = \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi r^2} dA_j$$

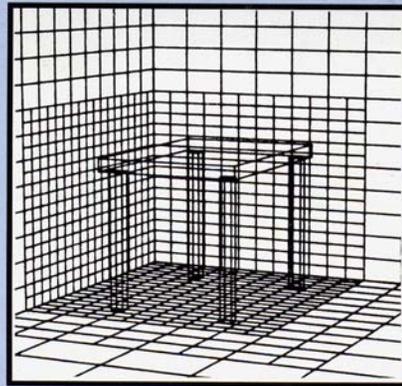
$$F_{A_i, A_j} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi r^2} VIS_{i,j} dA_j dA_i$$



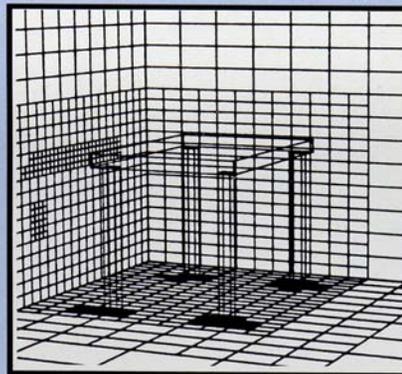
(a)



(b)

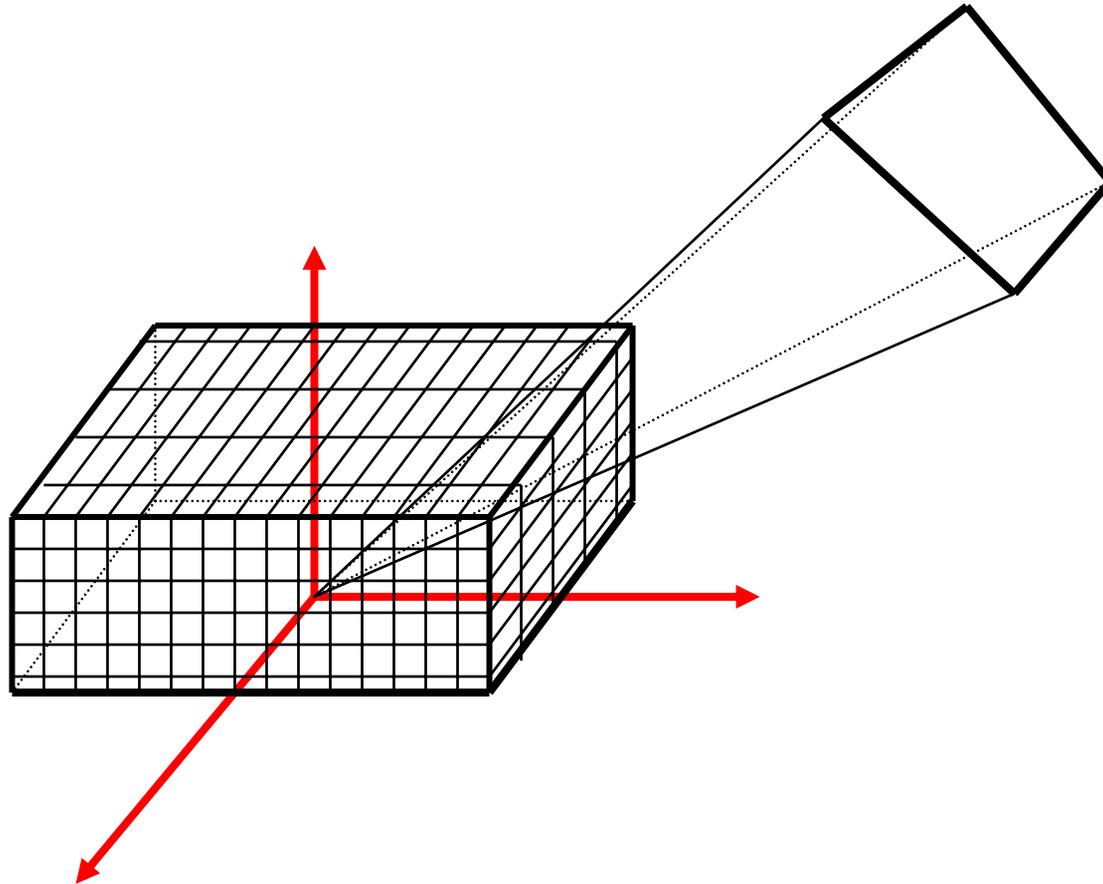


(c)

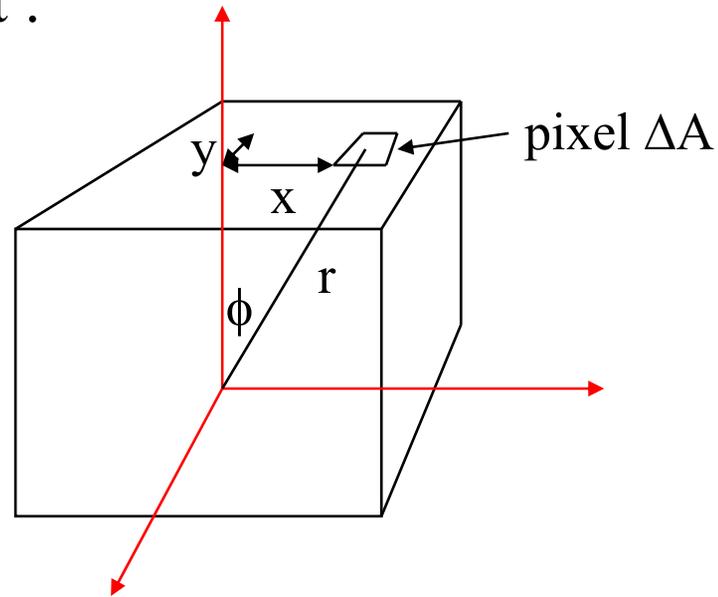


d'après M. Cohen (Cornell University), 1985

1. Solution de l'hémi-cube



calculs sur le haut :

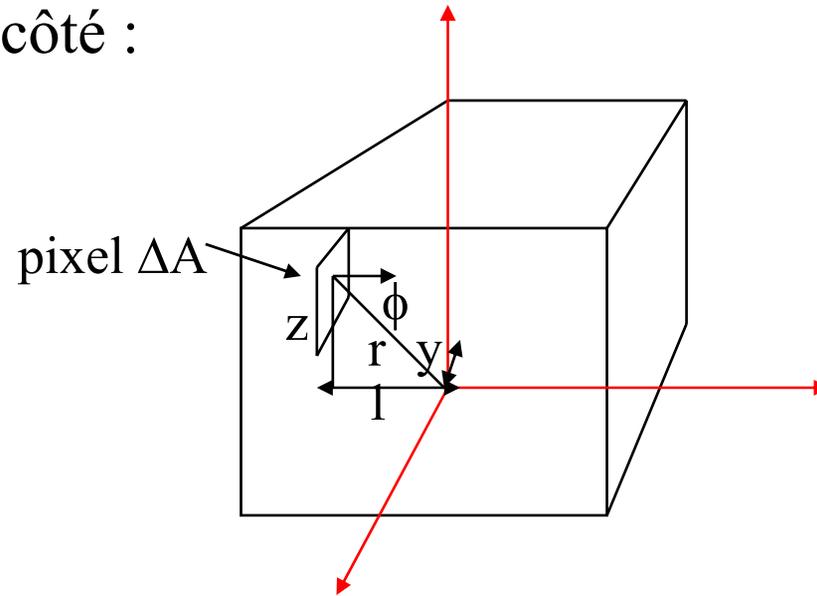


$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\cos \phi_i = \cos \phi_j = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

$$\text{facteur de forme élémentaire} = \frac{1}{\pi (x^2 + y^2 + 1)^2} \Delta A$$

calculs sur le côté :



$$r = \sqrt{y^2 + z^2 + 1}$$

$$\cos \phi_i = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}$$

$$\cos \phi_j = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}$$

$$\text{facteur de forme élémentaire} = \frac{z}{\pi (y^2 + z^2 + 1)^2} \Delta A$$

avantages : utilisation d 'un tampon de profondeur câblé

inconvénients : discrétisation => problèmes d'aliassage

2. solution du plan (SILLION 89)

3. solution de l 'hémisphère

4.3.2.2 - *Raffinement progressif*

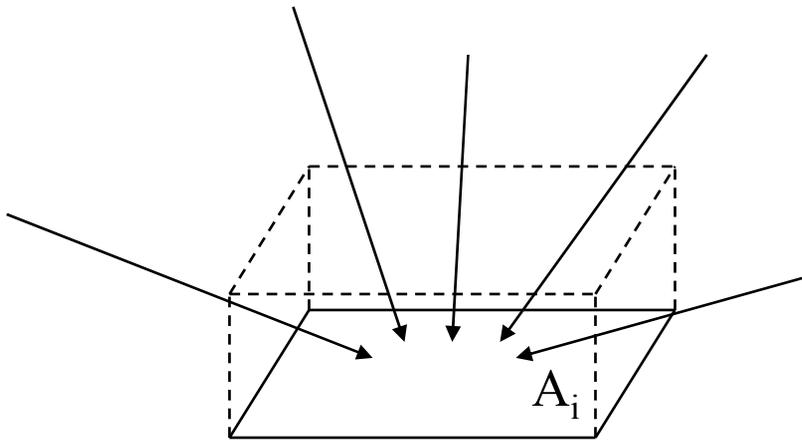
- ☛ interprétation du système (1) : la $i^{\text{ème}}$ ligne fournit une estimation de la radiosité de la surface i basée sur les estimations courantes des autres surfaces

$$B_i \text{ dû à } B_j = \rho_i B_j F_{ij}$$

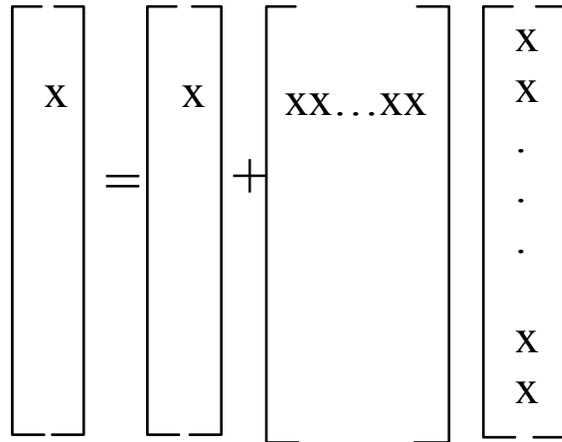
=> rassemblement de la lumière (gathering)

- ☛ autre interprétation : version projective (shooting)
surface i projette son énergie sur autres surfaces

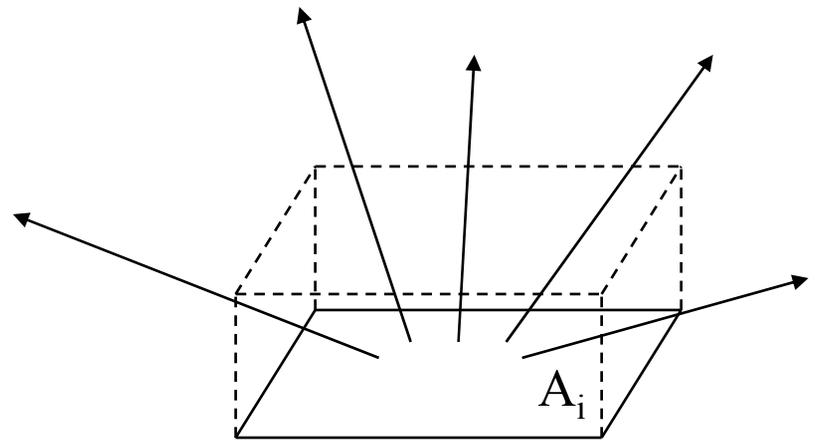
$$B_j \text{ dû à } B_i = \rho_i B_i F_{ij} A_i / A_j$$



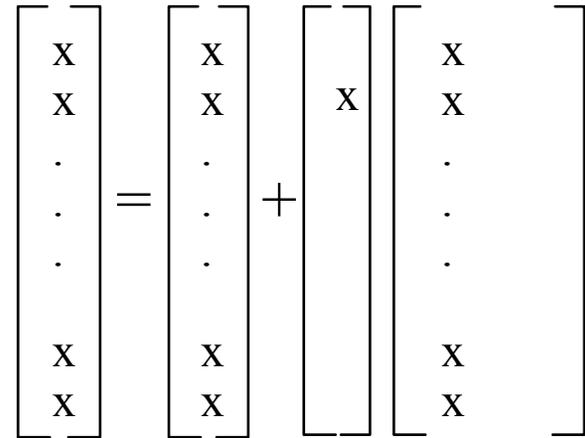
rassemblement



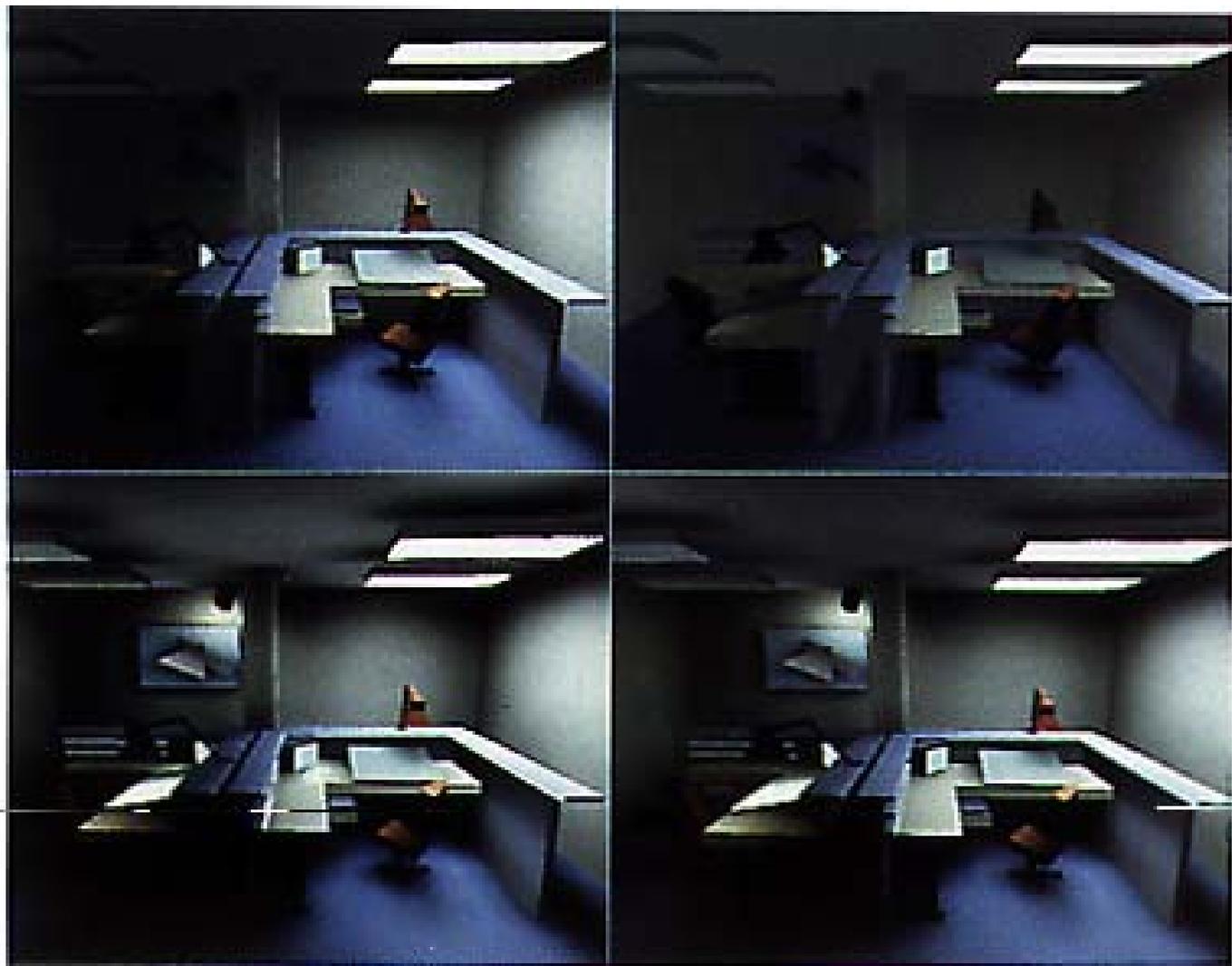
$$B_i = E_i + \sum_{j=1}^n \rho_i F_{ij} B_j$$



projection



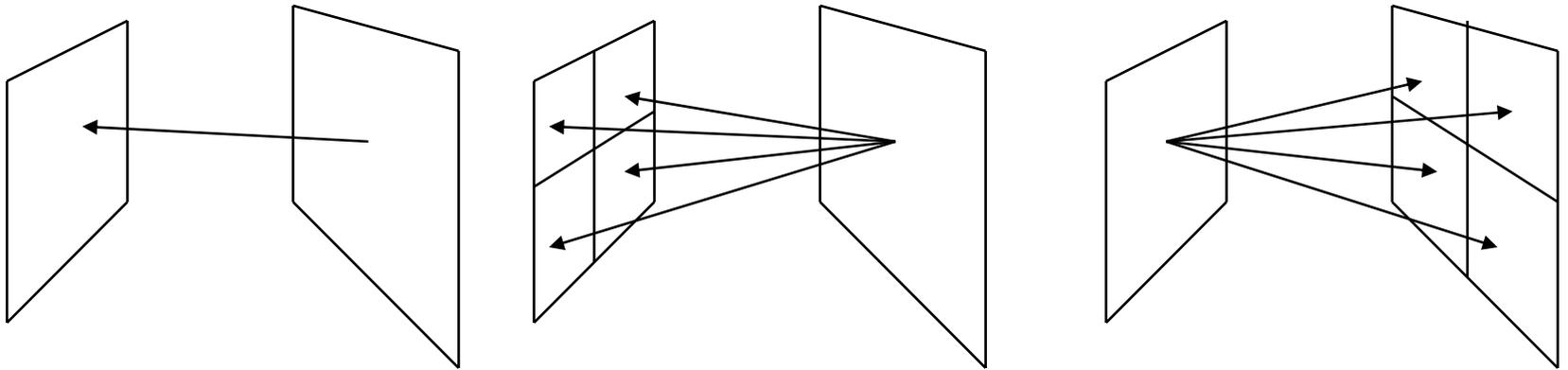
$$B_i = E_i + \rho_i F_{ji} B_j$$



d'après Cohen et al., Siggraph'1988

4.3.2.3 Méthodes hiérarchiques

☛ utilisation de liens



☛ nécessité d'un « oracle » : test sur les facteurs de forme estimés ou sur l'aire des carreaux

☛ utilisation d'une procédure de raffinement et de récolte (« push-pull »)

4.3.2.4 Méthodes de regroupement (clustering)

4.3.2.5 - Avantages et inconvénients

☛ Avantages :

- ☞ permet de calculer inter-réflexions entre surfaces (terme ambient)
- ☞ indépendant de la position de l'observateur

☛ Inconvénients :

- ☞ suppose surfaces diffuses
- ☞ temps de calcul (moins vrai pour méthodes hiérarchiques)
- ☞ place mémoire (surtout pour méthode initiale)

4.4 - Mixage des deux approches

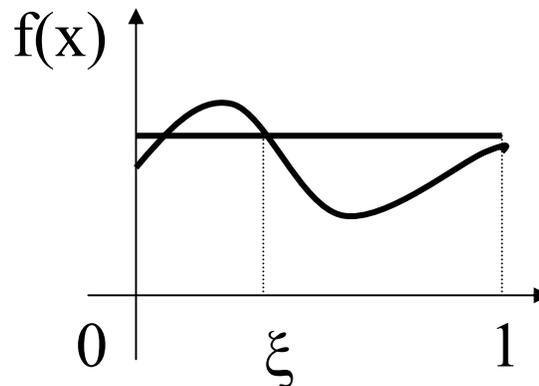
Méthodes en 2 passes

4.5. Les méthodes stochastiques

Elles sont basées sur les **méthodes de Monte Carlo**

➡ **Généralités** : on veut calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$

Si ξ est une variable aléatoire tirée uniformément sur $[0,1]$, $f(\xi)$ est un **estimateur primaire** de I , noté $\langle I \rangle_{\text{prim}}$



$$E(\langle I_{prim} \rangle) = \int_0^1 f(\xi) d\xi = I \quad (\text{on dit que l'estimateur est sans biais})$$

L'incertitude sur la valeur obtenue est fournie par la variance :

$$\sigma_{prim}^2 (\langle I_{prim} \rangle) = \int_0^1 [f(x) - I]^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - I^2$$

➡ Méthode de Monte Carlo

on prend N échantillons indépendants ξ_i

$$\langle I_{\text{sec}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i)$$

$$E(\langle I_{\text{sec}} \rangle) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) d\xi_1 \dots d\xi_N = I$$

$$\sigma_{\text{sec}}^2 = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \right]^2 d\xi_1 \dots d\xi_N - I^2$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^1 f^2(x) dx - \frac{1}{N} I^2$$

$$= \frac{\sigma_{\text{prim}}^2}{N}$$

➡ Echantillonnage stratifié

$\{A_i\}$ partition de $[0,1]$

$$I = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^N I_i$$

si tous les A_i ont même longueur et si on ne tire qu'un seul échantillon par domaine avec une loi uniforme sur A_i

$$\langle I \rangle_{strat} = \sum_{i=1}^N \langle I_i \rangle_{prim}$$

$$= \sum_{i=1}^N f(\xi_i)$$

$$\sigma_{strat}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\int_{A_i} \left(\frac{f(x_i)}{N} \right)^2 N dx_i - I_i^2 \right]$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{i=1}^N I_i^2$$

↳ Échantillonnage d'importance

soit p une fonction de densité de probabilité, ie vérifiant :

$$p(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 p(x) dx = 1$$

alors :

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx$$

Si ξ est une variable aléatoire échantillonnée suivant la densité p , on obtient un estimateur :

$$\langle I \rangle_{imp} = \frac{f(\xi)}{p(\xi)}$$
$$E(\langle I \rangle_{imp}) = I \quad \text{et}$$

$$\sigma_{imp}^2 = \int_0^1 \left[\frac{f(x)}{p(x)} \right]^2 p(x) dx - I^2$$
$$= \int_0^1 \frac{f^2(x)}{p(x)} dx - I^2$$

👉 Application à l'éclairage global

l'équation de rendu

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = L_e(x, \vec{\omega}_r) + \int_{\Omega_i} f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(x, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

peut être réécrite

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = L_e(x, \vec{\omega}_r) + \int_S f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(y, \omega_i) V(x, y) \cos \theta_i \frac{\cos \alpha}{r^2} dy$$

où S est l'ensemble des points de la scène et V une fonction de visibilité ; si on pose $V(x, y) \cos \theta_i \frac{\cos \alpha}{r^2} = G(x, y)$, on obtient

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = L_e(x, \vec{\omega}_r) + \int_S f_r(x, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(y, \omega_i) G(x, y) dy$$

Cette formule est récursive et peut s'écrire

$$L_r(\mathbf{x}, \vec{\omega}_r) = L_e(\mathbf{x}, \vec{\omega}_r) + \int_S f_r(\mathbf{x}, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_e(\mathbf{y}, \omega_i) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \\ \int_S \int_S f_r(\mathbf{x}, \vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_r(\mathbf{y}, \vec{\omega}_j \rightarrow \vec{\omega}_i) L_e(\mathbf{y}', \omega_j) d\mathbf{y}' + \dots$$

ce qui revient à intégrer l'équation du rendu suivant la longueur des chemins lumineux possibles, en suivant la méthode générale :

- ✓ choix aléatoire d'un couple (point, direction) pour initialiser un chemin lumineux
- ✓ propagation de ce chemin dans le milieu selon les lois de probabilité définies par les propriétés des matériaux

Cette méthode générale peut être déclinée de plusieurs manières :

- ✓ **lancer de chemins** : on choisit un chemin lumineux à partir de l'œil et on le propage dans la scène ; la valeur en un pixel est alors la moyenne des valeurs des chemins émis à travers ce pixel ;
- ✓ **lancer de particules** : on part des sources de lumière ;
- ✓ **méthodes bidirectionnelles.**