M2 Data Science - FM
TD1 Dénombrement

1. Expliquer pourquoi $\sum_k C_n^k 2^{n-k} = 3^k$ sans faire de maths.
2. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9. Combien y-a-t-il de codes possibles ? Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ? Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

3. Soit E un ensemble à n éléments. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ? Combien y-a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

4. Soit E un ensemble à n éléments ; Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \subset Y$?

5. Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

6. X, Y et Z designent des sous-ensembles disjoints d'un ensemble de n variables. Combien peut-on calculer d'indépendences conditionnelles de type $(X, Y \mid Z)$? Combien existe-t-il indépendences conditionnelles de type $(\{X\}, \{Y\} \mid Z)$ où $\{X\}$ désigne un singleton ?

7. Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Adélie, Brigitte, Chafik, Denis et Emilie autour de la table. Mais attention ! Denis et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte ! Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

8. On range p boules dans n cases. Combien y a-t-il de rangements différents si :

   — les boules et les cases son discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum.
   — les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules.
   — les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule au maximum.
   — les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules.

9. De combien de façons peut-on permutter les lettres du mot *erreur* ?

10. Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos sachant que sur chaque pièce figurent 2 symboles parmi : blanc, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ?

11. Un parking contient douze places alignées. Huit voitures s'y sont garées au hasard, et l'on observe que les quatre places libres se suivent. Est-ce surprenant ?

12. De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

13. En combinatoire, le n-ième nombre de Bell, B_n, est le nombre partitions d'un ensemble de n objets. On pose $B_0 = 1$. Les premiers nombres de Bell sont $1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \ldots$. Montrer la relation de récurrence $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

14. On range p boules discernables dans n cases indiscernables. Soit D_n^p le nombre de rangements possibles tels qu'aucune case ne soit vide ($p \geq n$). Montrer par récurrence que $D_n^p = n * D_n^{p-1} + D_{n-1}^{p-1}$ pour $p \geq n+1$. Que vaut D_1^p et D_n^n ?