M2 Data Science - FM
TD2 Probabilités

1. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

2. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique affirme, à propos de son nouveau test de dépistage, que : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1\%$. Peut-on autoriser la commercialisation de ce test ?

3. Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de $p_d = 0,05$ de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que : si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité $p_a = 0,96$, si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité $p_r = 0,98$. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ? Qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

4. m personnes montent au RDC d'un ascenseur d'un immeuble de n étages. Chacune de ces personnes choisit au hasard un étage. Calculer le nombre moyen d'arrêts de l'ascenseur.

5. Un rapport contient m erreurs. On soumet le rapport à des correcteurs. Les relectures sont indépendantes.
   - Le rapport est lu par 2 correcteurs C_1 et C_2. Soient n_1 et n_2 le nombre de fautes corrigées par l'un et l'autre, et n_{12} le nombre de fautes corrigées par les deux simultanément. Donner un estimateur simple de m.
   - On suppose que $m = 4$ et qu'à chaque relecture, une faute non corrigée est corrigée avec une probabilité $p = 1/3$. Combien faut-il de relectures pour qu'il n'y ait plus aucune erreur avec une probabilité supérieure ? $0,90$?
   - Même question en supposant que le nombre d'erreurs suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

6. J'ai deux enfants, dont un fils qui est né un jeudi, quelle est la probabilité que j'aie une fille ?

7. On considére deux variables aléatoires de Bernouilli, A et B, indépendantes. On pose $p_A = P(A = 1) = 0.6$ et $p_B = P(B = 1) = 0.4$. On effectue $n = 10$ tirages aléatoires de A et B et on stocke les résultats dans un tableau binaire à deux colonnes et n lignes.
   - On pose X le nombre de lignes contenant le couple $(1, 1)$, quelle est la loi de X ?

8. On considère un tableau binaire constitué de deux colonnes A et B,et de $n = 10$ lignes. Dans la colonne A, on répartit au hasard $n_A = 6$ valeurs 1 et on fixe les autres valeurs à 0. Dans la colonne B on répartit au hasard (et indépendamment des valeurs de A) $n_B = 4$ valeurs 1 et on fixe les autres valeurs à 0. On pose X le nombre de lignes contenant le couple $(1, 1)$. En ne considérant, par exemple, que les n_A lignes contenant un 1 dans la colonne A, calculer la probabilité qu'il y ait k '1' et $n_A - k$ '0' dans la colonne B, pour $k = 0, 1 \ldots, n_A$. En déduire la loi de X. Comparer le résultat avec l'exercice précédent.

9. Une compagnie d'assurance assure une flotte de 500 navires dont la valeur unitaire est de 5 millions d'euros. Un sinistre est la perte totale du navire, événement de probabilité 10^{-3} pour une année. Les sinistres sont indépendants.
   - Donner la loi du nombre X de navires assurés perdus au cours d'une année.
   - La compagnie règle ses indémnités ? la fin de chaque année. A combien doivent s'élever ses réserves pour qu'elle honore ses engagements avec une probabilité de 0,999 ?
   - Deux compagnies de même taille fusionnent. La nouvelle compagnie prend en charge 1000 navires. Refaire le calul précédent. Conclusion ?

10. Un lac contient N poissons. N est inconnu et doit être estimé à l'aide d'un échantillon. On pêche r poissons, on les marque en rouge et on les remet dans l'eau. Quelque temps après, on pêche n poissons dont x rouges. On pose X le nombre de poissons rouges dans l'échantillon.
    - Déterminer la loi de X.
    - Calculer $E[X]$. En déduire un estimateur de N en fonction de n, r, et x.