

## Evaluation des Performances TD2

1. Au cours d'un scrutin opposant deux candidats X et Y, X a obtenu 600 voix et Y 400. Quelle est la probabilité que X ait été majoritaire tout au long du scrutin ?
2. 100 personnes font la queue à un guichet de cinéma ; la place coûte 5 euros. 60 personnes ont un billet de 5 euros en poche, les 40 autres n'ont chacune qu'un billet de 10 euros. Combien faut-il de billets de 5 euros dans la caisse pour que, avec une probabilité d'au moins 98%, chacun soit servi dès qu'il se présente ?
3. Un automobiliste change de voiture tous les ans. Quand il possède une Citroën, il achète une Renault. Quand il possède une Renault, il achète une Ford. Quand il possède une Ford, il achète une Ford dans 50% des cas, une Citroën dans 25% des cas, une Renault dans 25% des cas.
  - Construire la chaîne de Markov. Est-elle ergodique ?
  - Sachant qu'il une Ford, quelle est la probabilité qu'il ait une Ford dans 2 ans ?
  - Sachant qu'il une Ford, quelle est la probabilité qu'il ait une Ford dans 20 ans ?
4. On considère un fort polygonal à 5 sommets. Une sentinelle se déplace d'un sommet à l'autre de telle sorte que si elle quitte un sommet il y a une probabilité  $p$  qu'elle se décide à aller au sommet adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre et  $1 - p$  à l'autre sommet adjacent.
  - On suppose qu'à l'état initial, la sentinelle est en 1. Au bout de 3 déplacements, quelles sont les probabilités de trouver la sentinelle aux sommets 1,2,3,4,5 ? (on prendra  $p = 1/3$  pour l'application numérique).
  - Après de multiples déplacements, quelles sont ces probabilités ?
5. Une étude de marché dans un magasin fait apparaître les faits suivants concernant l'achat de trois produits A,B,C :
  - après l'achat d'un produit A, l'achat suivant concerne 10 fois sur 100 le produit A, 20 fois sur 100 le produit B.
  - après l'achat d'un produit B, l'achat suivant concerne 50 fois sur 100 le produit B et 50 fois sur 100 le produit C.
  - après l'achat d'un produit C, l'achat suivant concerne 100 fois sur 100 le produit A.
  - En considérant comme états "l'achat d'un produit A", "l'achat d'un produit B", "l'achat d'un produit C", déterminer la matrice de transition.
  - Si, dans l'état initial, un produit A vient d'être acheté, avec quelles probabilités verra-t-on l'achat d'un produit A, B, C deux achats successifs plus tard ?
  - Au bout d'un grand nombre d'achats successifs, quelles sont les probabilités d'achat de A, B, C ?

6. Une escadrille composée de 4 drones est chargée de missions quotidiennes au dessus du territoire ennemi et y subit des pertes éventuelles. Elle n'effectue toutefois sa mission journalière que si son effectif en début de journée s'élève au moins à 3 appareils. Si d'autre part, son effectif au soir de la journée précédente est réduit à 2 ou moins de 2 drones, elle reçoit au cours de la nuit un drone de renfort. La probabilité de destruction d'un drone au cours d'une mission est  $p$ .
- Définir l'évolution du système avec  $p = 1/3$ .
  - Quel est le coût annuel des missions sachant qu'un drone coûte 10 millions d'euros ?
7. Un atelier de réparation s'occupe de deux types de moteurs. La réparation d'un moteur M1 demande 2 jours, celle d'un moteur M2 une seule journée. La probabilité de panne des moteurs M1 est  $p_1=0,33$ , celle des moteurs M2 est  $P_2=0,50$  pour chaque journée. Les travaux non effectués à l'atelier sont confiés à l'extérieur. Sachant que, si une journée de réparation a déjà été accomplie sur un moteur de type M1, on refuse tout travail pouvant se présenter le jour suivant, mais qu'on accepte n'importe quelle tâche chaque autre jour où il ne s'en présente qu'une, on hésite entre deux politiques dans le cas où il s'en présenterait deux différentes : 1) accorder la préférence à la réparation de M1, 2) préférer au contraire la réparation de M2. Pour chacun des cas :
- Quel est le débit des moteurs M1 et M2 ?
  - Quel est le taux de rejet pour les requêtes M1 et M2 ?
  - Quel est le taux d'occupation de l'atelier ?
  - On suppose un gain de 15 Keuros pour la réparation de M1 et de 10 Keuros pour M2. Quelle est la meilleure des deux politiques ?
8. Une urne A contient 2 boules blanches tandis qu'une urne B contient 4 boules rouges. Toutes les boules sont identiques hormis la couleur. A chaque étape du processus, on extrait une boule de chaque urne et l'on échange les deux boules extraites (la boule tirée de A va en B et la boule tirée de B va en A). On désigne par  $X_n$  le nombre de boules rouges que l'urne A renferme après  $n$  échanges.
- Calculer la matrice de transition
  - Quelle est la probabilité pour que, après 3 étapes, il y ait 2 boules rouges dans l'urne A ?
  - Quelle est la probabilité pour qu'à la longue il y ait 2 boules rouges dans l'urne A ?